Петров Ю. П.

Новые научные открытия в прикладной математике: рассказ для школьников и студентов

Аннотация

В книге рассказано о новых недавних научных открытиях в прикладной математике, позволяющих повысить надежность инженерных расчетов и создавать лучшую, более совершенную технику.

Изложение первой части книги доступно для школьников старших классов – разумеется, для тех, кто интересуется математикой и любит ее.

Вторая часть книги доступна для студентов первых курсов университетов и технических университетов.

Книга поможет школьникам старших классов правильно выбрать университет, в который они захотят поступить, а студентам первых курсов книга поможет выбрать кафедру, по которой они захотят специализироваться.

Введение

Любознательным школьникам и студентам, разумеется, интересны новейшие научные открытия – в том числе и открытия в математике. К сожалению, математика так разрослась и специализировалась, что не только сущность недавних открытий, но даже и названия их чаще всего непонятны ни школьнику, ни студенту.

Характерный и наиболее интересный пример – открытие, сделанное петербургским математиком Григорием Яковлевичем Перельманом – воспитанником хорошо известной в городе школы №239 и выпускником Санкт-Петербургского государственного университета. В 2006 году Г. Я. Перельман был удостоен высшей награды в области математики – медали Филдса – и премии в один миллион долларов за доказательство «гипотезы Пуанкаре», которая формулируется так: «всякое односвязное замкнутое трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере».

Для того, чтобы понять даже формулировку «гипотезы Пуанкаре» нужно быть знакомым с топологией, которая преподается далеко не во всех университетах. «Гипотеза Пуанкаре» и сам Г. Я. Перельман стали широко известны только потому, что Г. Я. Перельман по известным ему одному причинам отказался от миллионной премии, и об этом много писали журналы.

В 2010 году другой российский математик – Станислав Смирнов (снова выпускник той же школы №239 и Санкт-Петербургского государственного университета) получил медаль Филдса за «доказательство конформной инвариантности двумерной перколяции и модели Изинга в статической физике». Уже само название – прямо скажем – не очень вдохновляет.

Однако существуют и такие недавние научные открытия в прикладной математике, которые вполне понятны и доступны интересующемуся математикой школьнику и студенту. Об этих открытиях (сделанных, кстати, в стенах Санкт-Петербургского государственного университета) будет рассказано далее. Они относятся к изучаемым в средней школе на уроках алгебры эквивалентным (называющиеся еще равносильными) преобразованиям. Было открыто, что существуют дополнительные, ранее не замечаемые свойства этих преобразований и что неучет этих новых, недавно открытых свойств уже не раз приводил к опасным авариям и техническим катастрофам. Обо всем этом будет рассказано в книге.

Первые параграфы вполне доступны для школьников старшеклассников, интересующихся математикой. Для понимания этих разделов достаточно знания школьной математики, включая изученные в старшей школе простейшие дифференциальные уравнения. Для понимания следующих разделов (второй части книги) достаточно знания материала, излагаемого на первых курсах университетов и технических университетов.

Знакомство с новейшими открытиями в математике не только удовлетворяет законное любопытство, но и имеет практический смысл. Оно поможет школьнику старших классов, размышляющим – в какой университет ему поступить, сделать правильный выбор. Разумеется, предпочтительнее поступить в тот университет, где используются и совершенствуются последние научные открытия – в том числе и те открытия, о которых будет рассказано в настоящей книге. В конце книги будут перечислены такие университеты – к сожалению, пока еще не очень многочисленные.

Кроме того, студентам младших курсов университетов очень важно правильно выбрать кафедру, по которой они будут специализироваться (специализация обычно начинается с третьего курса). Очень важно выбрать такую кафедру, где используются и разрабатываются новые научные открытия. В конце книги будут охарактеризованы кафедры, использующие научные открытия, изложенные в книге, и это поможет студенту правильно выбрать кафедру.

По уровню доступности книга делится на две части: часть первая, от §1 до §8, доступна для интересующихся математикой школьников старших классов. В части первой используются только изучаемые в средней школе эквивалентные (равносильные) преобразования алгебраических уравнений и самые простейшие линейные дифференциальные уравнения. Эта часть может быть использована учителем как интересная тема для занятий математического кружка.

Часть вторая – начиная с §9 – рассчитана на студентов младших курсов университетов и технических университетов.

Часть первая (доступна для школьников старших классов, интересующихся математикой и любящих ее)

§1. Корректные и некорректные задачи

Понятие о корректных и некорректных математических задачах удобно разъяснить на простом примере.

Пример 1. Пусть вам выдали изгородь длиной a метров и поставили задачу — огородить участок земли площадью b квадратных метров; участок должен иметь форму прямоугольника, вы должны выбрать длины сторон участка.

Решение этой задачи несложно: обозначается длина изгороди, идущей вдоль одной из сторон будущего прямоугольного участка земли, через x. Тогда вторая сторона участка будет иметь длину $\frac{a}{2}-x$, а площадь прямоугольного участка будет равна произведению сторон, или $\frac{a}{2}x-x^2$. Если принять эту площадь заданной площади b, получается квадратное уравнение:

$$\frac{a}{2}x-x^2=b, \tag{1}$$

которое имеет два корня:

$$x_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{16}-b} \tag{2}$$

$$x_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{16}-b}\,. \tag{3}$$

Пусть, например, a = 8 метров, b = 3 м^2. Тогда x_1 = 2 +1 = 3 метра, x_2 = 2 - 1 = 1 метр. Если за длину первой стороны принять x_1, то длина второй стороны участка будет равна 4 - 3 = 1 метр, а если за длину первой стороны принять x_2 = 1 метр, то длина второй стороны будет равна трем метрам. Этот пример наглядно показывает, что хотя формально имеется два решения, два корня: x_1 и x_2, но на самом деле решение одно: просто более длинная сторона прямоугольного участка равна x_1, а более короткая равна x_2 метров. Легко проверить, что $x_1 \cdot x_2 = b$, т. е. произведение x_1 и x_2 равно заданной площади b.

Теперь рассматривается самое главное: ведь на практике почти всегда все условия и данные любой задачи известны только приближенно, поскольку данные и условия получаются из измерений, а все измерения имеют ограниченную точность.

Поэтому, когда говорится: площадь участка, который надо огородить, равна 3м^2, то это — условность. На самом деле можно только утверждать, что площадь участка находится в тех или иных пределах, зависящих от точности измерения. Если измерить с точностью до одной сотой, то можно только утверждать, что величина площади нашего участка заключена в пределах

$$2{,}97 \le b \le 3{,}03, \tag{4}$$

если измерить с точностью до одной тысячной, то можно указать более точную оценку:

$$2{,}997 \le b \le 3{,}003, \tag{5}$$

но любое измерение несет в себе ту или иную неизбежную погрешность.

Как будет влиять погрешность данных на решение?

Для простоты предполагается, что длина ограды a задана точно, и рассматривается, как будет влиять погрешность в измерении площади на величину x_1, длину большей стороны прямоугольника.

При наличии калькулятора нетрудно, пользуясь формулой (2), установить, что если, например, площадь участка измеряется с точностью до сотой, т.е. $2{,}97 \le b \le 3{,}03$, то длина большей стороны участка изменится в пределах $2{,}98488 \le x_1 \le 3{,}01489$ (действительно, если $b = 2{,}97$ м^2, то по формуле (2) находим, что $x_1 = 3{,}01489$ метра, а при $b = 3{,}03$ м^2 будет $x_1 = 2{,}98488$ м).

Это означает, что погрешность в измерении площади величиной в 1% приводит к погрешности решения, равной 0,496%. Точно так же нетрудно с помощью калькулятора рассчитать, что если заданная площадь измеряется с точностью до одной тысячной и имеет место неравенство (5), то для x_1 будет справедливо неравенство $2{,}998498 \le x_1 \le 3{,}001498$.

Это говорит о том, что погрешность в задании площади в 0,1% приведет к погрешности решения в 0,0499%.

Поэтому можно сделать вполне определенное заключение: малым погрешностям измерения будут соответствовать малые изменения решений.

Поэтому, несмотря на неизбежные малые погрешности в измерении площади, полученные нами значения длин сторон изгороди имеют практический смысл.

Точно так же можно проверить и влияние погрешности в заданной длине ограды a . Снова малым погрешностям в исходных данных будут соответствовать малые погрешности в решениях, в значениях длин сторон участка.

А если бы было наоборот? Если бы неизбежным малым погрешностям исходных данных соответствовали большие, коренные изменения в решениях? Ответ очевиден:

тогда решения не имели бы практического смысла, поскольку малые погрешности в измерениях неизбежны.

Терминология: корректными называются те задачи, где малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения решений, и некорректными называются задачи, в которых малым изменениям исходных данных соответствуют большие (или даже коренные) изменения в решениях (в дальнейшем это определение уточняется, но для начала оно достаточно).

В средней школе изучают только корректные задачи, однако нетрудно привести и примеры задач некорректных.

Необходимо рассмотреть ту же задачу об огораживании участка земли площадью b м^2 изгородью длиной a метров. Пусть имеет место равенство:

$$\frac{a^2}{16} = b \tag{6}$$

Тогда по ранее полученным формулам (2) и (3) получается простое решение: $x_1 = x_2 = \frac{a}{4}$, участок будет иметь форму квадрата. Однако корректна ли в данном случае эта задача? Легко убедиться, что она некорректна: пусть, измеряя площадь, произошла ошибка на сколь угодно малую величину ε, и истинная площадь оказалась больше чем $\frac{a^2}{16}$, т.е. на самом деле выполняется не равенство (6), а равенство

$$b = \frac{a^2}{16} + \varepsilon . \tag{7}$$

Тогда из формул (2) и (3) следует, что

$$x_{1,2} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{-\varepsilon} . \tag{8}$$

Таким образом, при ε > 0 вещественных решений не существует, совсем не существует даже при сколь угодно малых ε > 0, поскольку при ε > 0 оба корня уравнения (1) будут комплексными, включая корни квадратные из отрицательных чисел. Вещественных решений — а ведь только они в задаче о длине сторон имеют смысл — при сколь угодно малых ε просто нет. При $a^2 = 16b$ задача некорректна.

Физический смысл полученного результата достаточно ясен: если квадрат длины изгороди в 16 раз больше заданной площади, то задача формально имеет простое решение: $x_1 = x_2 = \frac{a}{4}$, но это решение не имеет практической значимости: если заданная площадь измерена даже со сколь угодно малой ошибкой, совершенно неизбежной на практике, то вполне может оказаться, что длины изгороди не хватит, что изгородь просто невозможно будет замкнуть, поэтому решения у нашей задачи не будет, а точнее — решение при сколь угодно малой ошибке измерения, $\varepsilon > 0$, изменится коренным образом, просто исчезнет. Формально это выразится в том, что x_1 и x_2 станут комплексными числами, но это означает, что в области вещественных чисел — а только они при измерении длин и интересны в данном случае — решение исчезнет.

Из этого маленького простого примера следует важный практический вывод: мало решить задачу, надо еще проверить ее корректность. Простейший метод проверки корректности заключается в том, что задачу решают несколько раз, с учетом наибольших возможных погрешностей в ее исходных данных и с учетом знаков погрешностей.

Если обнаружилось, что задача некорректна, то ее решение чаще всего никакого практического смысла не имеет.

Как же следует поступать, если мы встретились с некорректной задачей? Чаще всего нужно просто изменить задачу, вместо задачи некорректной рассмотреть другую, близкую к данной, но имеющую физический смысл.

Задача об изгороди. Пусть имеется равенство (6). Тогда, как уже было показано, задача имеет простое решение: $x_1 = x_2 = \frac{a}{4}$, но задача некорректна. Рассмотрим вместо нее другую: какой наименьший запас δ нужно добавить к заданной длине изгороди a для того, чтобы при погрешности измерения площади, равной ε м^2 задача построения замкнутой изгороди имела решение?

Используя уже полученные ранее формулы (2) и (3) с заменой заданной длины изгороди a на $a + \delta$, с учетом погрешности в измерении площади получается, что

$$x_{1,2} = \frac{a+\delta}{4} \pm \sqrt{\frac{(a+\delta)^2}{16} - (b+\varepsilon)}\,. \tag{9}$$

Теперь видно сразу, что решения будут вещественными (то есть будут иметь физический смысл) при

$$(a+\delta)^2 \geq 16(b+\varepsilon) \tag{10}$$

или (что то же самое) при

$$\delta \geq 4\sqrt{b+\varepsilon} - a\,. \tag{11}$$

Таким образом, наименьший возможный запас δ в длине изгороди (сверх уже имеющейся длины $a = 4\sqrt{b}$), при котором задача огораживания участка с площадью (b+ε) м^2 всегда имеет решение, зависит от ε, от погрешности измерений, и этот запас равен

$$b = 4\sqrt{b+\varepsilon} - a = 4\left(\sqrt{b+\varepsilon} - \sqrt{b}\right). \quad (12)$$

Если, например, a = 20 метров, b = 25 м^2 и ε = 0,25 м^2 (т.е. погрешность измерений может составить 1% от измеренной площади), то в этом случае δ = $4\sqrt{25{,}25} - 20 = 0{,}0998$ метра. Запаса длины изгороди длиной 0,1 метра заведомо хватит.

Это, конечно, очень простой иллюстративный пример. На самом деле, разделение задач математики и физики на корректные и некорректные было введено выдающимся французским математиком Жаком Адамаром в 1902 году при исследовании гораздо более сложных задач, а именно задач о распространении тепла. Адамар показал, что даже при сколь угодно малом изменении граничных условий решения многих важных для практики задач могут сильно меняться. Он предложил назвать такие задачи некорректными, выделил их в отдельный класс и начал их изучение. Ж. Адамар прожил долгую и плодотворную, почти столетнюю жизнь (он родился в 1865 году, а скончался в 1963 году), и изучение некорректных задач стало одним из самых знаменитых его достижений.

В дальнейшем выяснилось, что, во-первых, многие важные практические задачи (задачи геологической разведки, предсказания погоды и т. д.) являются некорректными, во-вторых, к некорректным задачам все же можно подойти (через регуляризацию, использование дополнительной информации и т.п.), но решение их много сложнее, чем решение задач корректных.

Главное, о чем нужно всегда помнить, — это то, что в любой практической задаче мало найти решение; нужно еще проверить, корректна ли задача. Если она некорректна, то ее решение практического смыла чаще всего не имеет.

Однако вплоть до последнего десятилетия считалось, что все задачи математики, физики и техники делятся на два класса — корректных и некорректных задач. Поэтому, когда в стенах Санкт-Петербургского государственного университета на факультете «Прикладной математики — процессов управления» в 1990 - 1997 гг. было обнаружено существование третьего класса, то первоначальное сообщение о существовании нового, необычного класса задач было встречено с законным недоверием, которое потом постепенно рассеялось. Своеобразие (и интерес) третьего класса задач заключалось в том, что в него входили «задачи-перевертыши», которые меняли свою корректность, делались корректными из некорректных и наоборот при совершенно законных, эквивалентных преобразованиях, в том числе и при преобразованиях, используемых в ходе решения этих задач. «Задачи-перевертыши» нельзя было поэтому отнести ни к корректным, ни к некорректным, и их пришлось выделить в особый третий класс.

Поскольку в третьем классе задач возможно изменение корректности при эквивалентных (равносильных) преобразованиях, то далее кратко напоминаются основные свойства таких преобразований.

§2. Эквивалентные (равносильные) преобразования

Эквивалентными (или равносильными – оба названия равноправны) называются преобразования, не изменяющие решений рассматриваемой задачи. Эквивалентными системами уравнений называются системы, имеющие одни и те же решения. Эти системы могут быть получены одна из другой с помощью эквивалентных преобразований. Примеры эквивалентных преобразований: перенос членов из левой части уравнений в правую с изменением знака, прибавление к правой и левой части одной и той же величины, умножение и деление всех членов уравнения на одно и то же число, не равное нулю.

Эквивалентные преобразования широко применяются при решении уравнений. Так, если задано уравнение: $3x - 6 = 0$,то оно преобразуется:

$$3x - 6 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2\,, \tag{13}$$

и в конце цепочки преобразований получается решение: $x = 2$. Существуют и неэквивалентные преобразования, поэтому к преобразованиям уравнений следует относиться осторожно, поскольку при преобразованиях можно незаметно потерять некоторые решения (корни) или же приобрести новые (кажущиеся) решения, не удовлетворяющие на самом деле исходному уравнению. Так, если мы поделим на х все члены уравнения $x^2 + 3x = 2x$, то мы потеряем корень $x = 0$.

Если возвести в квадрат левую и правую части уравнения $\sqrt{2x+3} = x$, то получается квадратное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ и, найдя два его корня $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, подстановкой можно убедиться, что второй корень не удовлетворяет исходному уравнению, является лишним, т.е. фиктивным. Поскольку в средней школе подробно рассматриваются правила эквивалентных преобразований, случаи потери решений или появления дополнительных (фиктивных) решений и корней, то можно ограничиться только кратким напоминанием об этом.

Отметим еще, что ответ на вопрос о том, является данное преобразование эквивалентным или нет, зависит от конкретной задачи, которая решается. Пусть, например, задана система двух уравнений с двумя переменными x и y:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y = 4 \\ x + y = 2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и поставлена задача: найти значение переменной x, удовлетворяющее системе (14), а отыскание значения переменной y в задачу не входит. Тогда, вычитая из первого уравнения (14) второе, можно придти к уравнению

$$2x = 2\,, \tag{15}$$

из которого находится, что $x = 1$. По отношению к рассматриваемой задаче уравнение (15) эквивалентно системе (14), поскольку и система (14), и уравнение (15) имеют одно и то же решение: $x = 1$. Если бы была задана другая задача — найти значения x и y, удовлетворяющие системе (14), то уравнение (15) уже не было бы эквивалентно системе (14). Эквивалентной системе (14) была бы система, состоящая из уравнения (15) и, например, второго из уравнений (14) — т. е. система

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

из которой легко находится, что $x = 1$, $y = 1$.

В дальнейшем рассматривается поведение решений и при преобразованиях уравнений, и при вариациях (малых изменениях) из коэффициентов. Определение: заданные (или полученные в результате измерения) значения коэффициентов будем называть номинальными значениями и обозначать a_{in}, проварьированными будем называть коэффициенты

$$a_{ib} = a_{in}(1 + \varepsilon_i)\,, \tag{17}$$

где ε_i – числа малые в сравнении с единицей; они могут иметь любой знак – и положительный, и отрицательный. Величины $\varepsilon_i a_{in}$ называются вариациями номинальных значений коэффициентов.

Из формулы (17) видно, что если номинальное значение какого-либо коэффициента равно нулю, то и вариация его будет равна нулю – т.е. «нуль не варьируется».

§3. Системы линейных однородных уравнений с параметрами

Пример 2. Примером системы линейных однородных уравнений с параметром может служить система

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

где x_1 и x_2 — неизвестные, а λ — параметр, который может принимать любые значения. Система (18) называется однородной потому, что свободные члены (члены, не содержащие неизвестных) в обоих уравнениях равны нулю.

Как и всякая система однородных уравнений, система (18) обязательно имеет нулевые решения, когда все неизвестные равны нулю: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Однако при некоторых значениях параметра λ система (18) имеет и ненулевые решения. Так, например, при λ = 0 система (18) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

и сразу видно, что системе (19) помимо решений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ удовлетворяют решения $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ или $x_1 = -6$, $x_2 = 2$ и вообще все пары x_1, x_2, удовлетворяющие соотношению $x_1 = -3x_2$. Аналогично при λ = 4 система (18) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и имеет ненулевые решения: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ или $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ и вообще любые пары x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношению $x_1 = x_2$.

Таким образом, система (18) имеет ненулевые решения при λ = 0 и при λ = 4 . При любых других значениях параметра λ ненулевых решений система (18) не имеет.

Вообще для систем линейных однородных уравнений с параметром наибольшее значение имеет не нахождение значений переменных (неизвестных) x_1 и x_2, удовлетворяющих системе, а нахождение значений параметра λ, при котором система имеет какие-либо ненулевые решения.

Многие важные практические задачи, о которых рассказывается далее более подробно, сводятся к нахождению значений параметра λ, при котором существуют ненулевые решения у системы (18) и у аналогичных ей более сложных систем с большим числом уравнений и переменных (неизвестных) x_1; $x_2 \dots x_n$.

При расчете и проектировании современных сложных технических систем приходится решать подобные системы, состоящие из сотен и даже тысяч уравнений. При решении, конечно, пользуются быстродействующей вычислительной техникой. «Вручную» с такими системами справиться невозможно.

Рассмотрим, каким методом можно систематически находить нужные значения параметра λ для систем (18) и ей подобных. Одним из возможных и применяемых методов является последовательное исключение переменных — до тех пор, пока дойдет до уравнения с одним неизвестным.

Так, исключается x_1 из системы (18). Для этого домножается второе из уравнений (18) на (1 -λ), после чего вычтается второе уравнение из первого. После вычитания получим одно уравнение с одной переменной:

$$\left(\lambda^2 - 4\lambda\right)x_2 = 0\,, \tag{21}$$

эквивалентное в отношении рассматриваемой задачи о значениях параметра λ, доставляющего ненулевые решения исходной системе (18). Из уравнения (21) сразу видно, что ненулевые решения, ненулевые значения переменной x_2 возможны при

$$\left(\lambda^2 - 4\lambda\right) = 0\,, \tag{22}$$

т.е. при $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 4$. Других значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения, не существует. Было показано ранее, что $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 4$ действительно доставляют системе (18) ненулевые решения.

Заметим, что поскольку умножение всех членов второго из уравнений (18) не на постоянное число, а на полином (1 - λ), равный нулю при λ=1, то при этом преобразовании можно приобрести лишний корень λ = 1. Однако, подставив λ = 1 в систему уравнений (18), получается система

$$\left.\begin{aligned} 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

не имеющая других решений, кроме $x_1 = x_2 = 0$ и, следовательно, λ = 1 не является значением параметра λ, доставляющим ненулевые решения системе (18). В данном случае преобразованная система (21) эквивалентна исходной системе (18) по отношению к рассматриваемой задаче. В общем случае эквивалентность исходной и преобразованной систем всегда надо проверять.

Пример 3. Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda^2 x_1 - (\lambda + 1)x_2 &= 0 \\ (1 - 2\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и снова ставится задача об отыскании значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения. Домножив все члены второго уравнения (24) на (λ + 1) и сложив его с первым, получается:

$$(1 - \lambda)x_1 = 0\,. \tag{25}$$

Из уравнения (25) следует, что единственным искомым значением параметра λ является λ = 1. Подставив λ = 1 в систему (24), получим:

$$\left.\begin{array}{l}2x_1 - 2x_2 = 0\\ -x_1 + x_2 = 0\end{array}\right\}. \tag{26}$$

Система (26) действительно имеет много ненулевых решений, что подтверждает правильность найденного нами значения параметра, а именно: $\lambda = 1$. Можно убедиться, что других значений, кроме $\lambda = 1$, являющихся решениями поставленной нами задачи, не существует.

Однако, можно ли утверждать, что полученное нами решение, которое можно записать так: λ = 1, является единственным значением параметра λ, удовлетворяющим условию поставленной задачи, действительно имеет физический смысл?

Нет, этого утверждать нельзя, пока не проверить корректность задачи. Проверка корректности необходима всегда. Необходимо сделать эту проверку.

Варьируется первый коэффициент в первом из уравнений (24), т.е. вместо системы (24) рассматривается система:

$$\left.\begin{array}{l}2(1+\varepsilon)\lambda^2 x_1 - (\lambda + 1)x_2 = 0\\ (1-2\lambda)x_1 + x_2 = 0\end{array}\right\}. \tag{27}$$

Снова домножив второе из уравнений системы (27) на λ+1 и сложив его с первым, получается

$$\left(2\varepsilon\lambda^2 - \lambda + 1\right)x_1 = 0. \tag{28}$$

Квадратное уравнение (28) имеет два решения:

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{4\varepsilon}(1 \pm \sqrt{1-8\varepsilon})$; приближенно, для малых ε, имеют место равенства $\lambda_1 = 1 + 2\varepsilon, \lambda_2 = \dfrac{2}{\varepsilon}$, точность которых выше, чем меньше ε.

Из уравнения (28) следует, что при сколь угодно малом ε, при сколь угодно малых погрешностях в значении первого коэффициента системы (27) решение нашей задачи изменится коренным образом: значений параметра λ, при котором существуют ненулевые решения у системы (27), будет уже не одно, а два, причем второе значение при сколь угодно малых ε будет сильно отличаться от первого, и исчезнет второе значение лишь при точном равенстве ε = 0.

Полученное ранее единственное решение примера 3, решение λ= 1, не имеет физического смысла для всех тех случаев, когда коэффициенты системы (24) получены в результате опыта или измерения и известны нам лишь с ограниченной точностью. При любой точности измерений будет получаться два решения, а не одно.

Является ли корректной задача поиска значений параметра λ, доставляющего ненулевые решения для рассмотренной ранее системы (18)? Да, для системы (18) эта задача корректна. Доказать это нетрудно, хотя и весьма громоздко: нужно проварьировать все шесть коэффициентов системы (18), т. е. рассмотреть систему:

$$\left.\begin{aligned}(1+\varepsilon_1)x_1-(1+\varepsilon_2)\lambda x_1+3(1+\varepsilon_3)x_2=0\\(1+\varepsilon_4)x_1+3(1+\varepsilon_5)x_2-(1+\varepsilon_6)\lambda x_2=0\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

и убедиться, что при малых ε_1; ε_2; … ε_6 значения параметра λ, при которых существуют ненулевые решения у системы (29), будут мало отличаться от найденных нами ранее значений $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2= 4$.

Ввиду громоздкости проверки корректности, ее часто не производят, но это неправильно, поскольку даже в несложных задачах можно натолкнуться на некорректность и получить неверный ответ, исправить который можно только проверкой корректности.

Можно заметить, что появление второго значения λ при вариациях коэффициентов у системы (24) не имеет ничего общего с известным по курсу средней школы появлением лишних корней при неэквивалентных преобразованиях уравнений. Нет, система (25) полностью эквивалентна системе (24), так же как система (28) полностью эквивалентна системе (27) в отношении рассматриваемой нами задачи о значениях параметра λ. В отличие от примеров, рассматриваемых в средней школе, лишнее значение параметра λ появляется у системы (24) только при вариациях коэффициентов, полностью зависит от величины и знака этих вариаций и может при малых вариациях быть очень большим (приближенно $\lambda_2 = \frac{2}{\varepsilon}$).

В примерах, рассматриваемых в средней школе, лишние корни появлялись лишь в тех случаях, когда используемые преобразования не были эквивалентными, и эти лишние корни, лишние решения не зависели, разумеется, (это важно подчеркнуть) от вариаций коэффициентов и не исчезали в том случае, если коэффициенты в точности равнялись своим номинальным значениям.

Системы (18) и (24) дают нам примеры корректных и некорректных задач из области линейных однородных уравнений.

В следующем разделе мы перейдем к самому интересному — к «задачам-перевертышам», которые могут изменять корректность при эквивалентных преобразованиях.

§4. Неожиданная встреча с «задачами-перевертышами»

Пример 4. Рассмотрим задачу о вычислении параметра λ, доставляющих ненулевые решения, для системы трех уравнений с тремя переменными:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda x_1 - x_3 = 0 \\ &x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ &x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Поскольку в последнее из уравнений (30) параметр λ не входит, и из него следует, что $x_1 = x_2$, то это подсказывает простейший путь к решению: пользуясь третьим уравнением и вытекающим из него соотношением $x_1 = x_2$, можно заменить в первых двух уравнениях x_2 на x_1 и придти к эквивалентной системе двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\lambda x_1 - x_3 = 0 \\ &(1 - 2\lambda)x_1 + x_3 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

Сложив их, исключая x_3 и получится:

$$(1-\lambda)x_1 = 0, \tag{32}$$

откуда окончательно находится, что единственным искомым значением λ является λ $=1$.

Проверяется корректность задачи. Для этого повторяются все выкладки для системы (30) с проварьированными коэффициентами, т. е. для системы

$$\left.\begin{aligned} &(1+\varepsilon_1)\lambda x_1 - (1+\varepsilon_2)x_3 = 0 \\ &(1+\varepsilon_3)x_1 - (1+\varepsilon_4)2\lambda x_2 + (1+\varepsilon_5)x_3 = 0 \\ &(1+\varepsilon_6)x_1 - (1+\varepsilon_7)x_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Выкладки немного громоздки, но, терпеливо проведя их, можно убедиться, что при малых ε_1; $\varepsilon_{2\ldots}\varepsilon_7$ искомое значение параметра λ мало отличается от ранее найденного значения λ = 1, поэтому рассматриваемая задача корректна.

Однако решение поставленной задачи можно вести и по-другому — можно исключать переменные в порядке их индексов, т. е. начать с исключения x_1. Именно так и будет поступать электронная вычислительная машина, запрограммированная на вычисление значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения системам линейных однородных уравнений путем исключения переменных одного за другим, поскольку для вычислительной машины важнее всего производить вычисления по единой и наиболее простой программе.

Домножив второе из уравнений (30) на -λ и сложив его с первым, а затем вычтя третье из уравнений (30) из второго, исключая x_1, получается система двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}2\lambda^2 x_2+(\lambda+1)x_3&=0\\(1-2\lambda)x_2+x_3&=0\end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

Исключив из системы (34) x_2, получается снова уравнение (32) и единственное значение параметра λ = 1. Это еще раз подтверждает, что система (34) эквивалентна системе (30) и получена из системы (30) эквивалентными преобразованиями.

Однако для системы (34) задача вычисления значений λ, доставляющих ненулевые решения, некорректна. Можно проверить это, проварьировав коэффициенты системы (34), а можно просто вспомнить уже исследованную систему (24), которая полностью совпадает с системой (34), отличаясь от нее лишь обозначением переменных.

Вот и произошла встреча с новым и неожиданным явлением: для системы (30) задачу о вычислении значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения, нельзя назвать ни корректной, ни некорректной: при одном порядке исключения переменных она корректна, при другом порядке исключения тех же переменных она уже некорректна. Тем самым система (34) доставляет нам один из простейших примеров задач третьего класса — как бы промежуточного между классом корректных и классом некорректных задач, класса, состоящего из «задач-перевертышей», которые могут поменять корректность в ходе решения.

Задачи, относящиеся к третьему классу, — это не просто математические диковинки, интересные только для математиков. Они имеют и серьезное практическое значение. Действительно, уже рассказывалось, что перед решением задачи нужно проверить ее корректность — иначе решение не имеет никакого практического смысла и только вводит в заблуждение. То, что фактически корректность часто не проверяют, не оправдание. Корректность надо проверять, иначе полученное решение не будет достоверным.

Существование третьего класса задач говорит о том, что и проверка корректности не всегда достаточна для уверенности в надежности решения. Уже была проведена проверка корректности задачи о параметре λ для системы (34) при решении ее «с конца», когда начинается исключение переменных с последнего уравнения. При этом методе решения рассматриваемая задача корректна. А при другом методе решения, при другой цепочке преобразований, при исключении переменных «с начала», с переменной x_1 та же задача становится некорректной, и теперь уже сколь угодно малая ошибка округления при исключении переменных может привести к неверному решению.

А первопричина возможной грубой ошибки заключается в том, что не была учтена возможность изменения корректности задачи при эквивалентных преобразованиях уравнений. Система (30) и система (34) в отношении рассматриваемой нами задачи о значениях параметра λ, доставляющих ненулевые решения, эквивалентны. При номинальных значениях коэффициентов они имеют одно и то же единственное решение $\lambda = 1$. Система (34) получена из системы (30) эквивалентными преобразованиями, но вот корректность задачи при этих эквивалентных преобразованиях изменилась.

Когда подобные факты и примеры были впервые обнаружены, они сначала вызвали недоумение у многих математиков. Дело в том, что к эквивалентным преобразованиям постепенно привыкли относиться как к преобразованиям тождественным, которые ничего не должны изменять. «Раз использованные Вами преобразования изменили такую серьезную вещь, как корректность задачи, значит Ваши преобразования были не эквивалентными. Ищите, где нарушена эквивалентность», — такова была реакция собеседников автора в ответ на демонстрацию в 1990 и 1991 годах первых примеров изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, подобных примеру 4.

Но ведь на самом деле ничего необычного в этих примерах нет. Нужно только внимательно разобраться в том, что же такое эквивалентное преобразование, какими свойствами оно обладает и какими не обладает. После внимательного рассмотрения истинных свойств эквивалентных преобразований кажущаяся неожиданность перестает быть неожиданной, ее причины раскрываются и делаются понятными.

§5. Объяснение неожиданности. Преобразования, эквивалентные в классическом смысле и в расширенном смысле

Для объяснения неожиданности, с которой было знакомство в предыдущем разделе, необходимо перечитать еще раз внимательно определение эквивалентного преобразования: «эквивалентными называют преобразования, при которых исходная и преобразованная системы имеют одни и те же решения».

В определении говорится только о решениях рассматриваемых систем. А ведь если утверждать: «для данной системы та или другая задача корректна», то это фактически суждение не о самой системе, а о целом семействе систем, близких к исходной, но не тождественных ей.

Если задача корректна, то близкие системы будут иметь близкие решения. Так, например, когда утверждается: для системы (30) задача вычисления значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения, корректна, то это фактически суждение не о системе (30), а о системе (33) — утверждается, что система (33) при малых ε_1; $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$ будет (при исключении переменных «с конца», с последнего уравнения) иметь решения, мало отличающиеся от решения $\lambda = 1$ для системы (30).

Теперь становится понятным, что эквивалентное преобразование, не изменяющее решений самой рассматриваемой нами системы, совсем не обязано оставлять неизменными решения других систем, близких к рассматриваемой нами, но не тождественных ей (так, система (33) при малых ε_1; $\varepsilon_{2\ldots}\varepsilon_7$ близка к системе (30), но не тождественна ей).

Так получает простое объяснение кажущаяся неожиданность. На самом деле неожиданности нет, эквивалентные преобразования совсем не обязаны сохранять корректность, а недоверчивая первая реакция многих математиков на примеры, подобные системе (30), возникла только потому, что чаще всего при эквивалентных преобразованиях корректность сохраняется, к этому привыкли и не обращали внимания на то, что «чаще всего» еще не означает непременно «всегда». Хотя и не очень часто, но приходится иметь дело и с примерами, когда при эквивалентных преобразованиях корректность меняется.

Для того, чтобы не происходило недоразумений, автор предложил еще в 1994 году уточнить определения и, помимо обычного (классического) понятия эквивалентных преобразований, ввести новое понятие — преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

Таким образом, преобразования, эквивалентные в классическом смысле, — это те привычные нам со школы преобразования, при которых исходная и преобразованная системы имеют одни и те же решения.

Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, — это те, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, и, во-вторых, не изменяют корректности рассматриваемой нами задачи.

Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, естественно, эквивалентны и в классическом смысле.

Преобразования, эквивалентные в классическом смысле, чаще всего (но не всегда) эквивалентны и в расширенном смысле. Однако существуют преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном.

Пример: система (34) эквивалентна системе (30) в классическом смысле (в отношении рассматриваемой нами задачи о значениях параметра λ) и не эквивалентна системе (30) в расширенном смысле.

Законы, которым подчиняются преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, существенно сложнее тех простых правил, которые изучаются в средней школе для преобразований, эквивалентных в классическом смысле.

Правила преобразований, эквивалентных в классическом смысле,— такие как «можно переносить члены уравнения из левой части а правую, но с изменением знака; можно умножать все члены на одно и то же число, но не равное нулю» и т.п., — универсальны, пригодны почти для любых задач, для любых уравнений. В то же время для преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, очень много зависит от конкретной задачи: так, для системы (18) исключение переменной x_1 путем домножения всех членов второго из уравнений (18) на $-(1-\lambda)$ и сложение с первым является преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле, а для системы (30) то же исключение переменной x_1 путем аналогичных домножений и сложений уже не эквивалентно в расширенном смысле, хотя оно, разумеется, эквивалентно в классическом смысле.

Заметим, что и для преобразований, эквивалентных в классическом смысле, существует некоторая зависимость от решаемой задачи: так, в примере №2 мы рассматривали систему (14) и установили, что если нужно найти только значение переменной x, удовлетворяющее системе (14), то преобразование системы (14) в уравнение (15) является эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием, а если нужно найти значения и переменной x и переменной y, удовлетворяющие системе (14), то преобразование системы (14) в уравнение (15) уже не будет эквивалентным в классическом смысле.

Однако для преобразований, эквивалентных в классическом смысле, зависимость от решаемой задачи очень простая, а вот для преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, все сложнее, и фактически нужно всегда рассматривать комплекс: рассматриваемая задача — используемое преобразование.

В дальнейшем будет рассказано о тех закономерностях эквивалентных в расширенном смысле преобразований, которые удалось выявить к настоящему времени. Каждая неожиданная встреча с преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, может привести к ошибкам в вычислениях, поскольку даже малая погрешность округления может в этом случае привести к ошибке. В то же время, если заранее известно о возможности ошибки и о существовании преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, то возможной ошибки гораздо легче избежать.

Еще более опасные явления возможны при эквивалентных преобразованиях уравнений систем управления, о которых будет рассказано далее.

§6. Приложения к системам управления

Поведение большинства систем управления описывается дифференциальными уравнениями, причем очень простыми уравнениями — линейными с постоянными коэффициентами.

Простейшие из подобных уравнений изучаются в средней школе. Так, уравнение радиоактивного распада имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -mx, \tag{35}$$

где переменная величина (функция времени) x — это масса распадающегося вещества, t — время, m — постоянный коэффициент, определяющий скорость распада. Из уравнения (35) следует, что производная неизвестной функции x отличается от самой функции только постоянным коэффициентом, откуда сразу видно, что искомой функцией сможет быть только экспонента:

$$x = x_o e^{-mt}, \tag{36}$$

где e = 2,7318 …— основание натуральных логарифмов. Только для экспонент операция дифференцирования равнозначна операции умножения на постоянное число, стоящее в показателе экспоненты. Действительно, для функции (36) имеем

$$\frac{d}{dt} x_o e^{-mt} = -mx_o e^{-mt} = -mx, \tag{37}$$

где $x_о$ — это масса распадающегося вещества в начальный момент времени, при t = 0. Прямой подстановкой в уравнение (35) убеждаемся, что функция (36) действительно удовлетворяет уравнению (35). Для экспоненциальной функции e^{-t} имеются подробные таблицы. Пользуясь ими, легко установить, что при $t = \frac{0,693}{m}$ будет $x_o e^{-mt} = 0,5x_o$, т. е. за время $t = \frac{0,693}{m}$ распадается половина первоначально имеющейся массы распадающегося радиоактивного вещества. Постоянную 0,693/m называют «постоянной полураспада». Для различных радиоактивных элементов эта постоянная очень различна. Так, для урана постоянная полураспада» равна 4,8 миллиарда лет, для радия — 1600 лет, для полония — 140 дней и т. п.

В уравнения, которые описывают системы автоматического управления, входят переменные x_1; x_2;…x_n , которые являются отклонениями регулируемых параметров — температуры, скорости и т. п. — от желательных значений. Поскольку эти отклонения должны быть невелики, то всеми старшими степенями переменных можно пренебречь и учитывать только члены с первыми степенями переменных, линейные члены. Поэтому уравнения, описывающие системы управления, будут линейными. В уравнения будут входить и управляющие воздействия (их обычно обозначают буквой u), формируемые по тому или иному закону из переменных x_1; x_2;…x_n.

Решения уравнений будут описывать процессы, происходящие в системах управления, законы изменения переменных x_i — то есть отклонений от желаемых значений — в функции времени t. Поскольку уравнения большинства систем управления являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то их решения — переменные $x_1(t);...x_д(t)$—будут являться комбинациями экспонент вида (36) с различными показателями.

Однако еще до детального решения уравнений систем управления всегда интересует главный, принципиальный вопрос — будут эти решения убывать с течением времени или будут возрастать. Если переменные будут с течением времени возрастать, значит, отклонения температуры, скорости и т. п. от желательных значений будут с течением времени неограниченно возрастать. Понятно, что такая система (ее называют неустойчивой) будет непригодна для практической работы. Для такой системы нет смысла подробно вычислять решения, систему нужно сразу, еще на стадии расчета, забраковать и заменить на другую, устойчивую систему, в которой переменные x_1; x_2;…x_n будут с течением времени убывать по модулю и стремиться к значениям $x_1 = x_2 =… x_n = 0$.

Для линейных дифференциальных уравнений есть простой способ проверки устойчивости их решений — метод построения характеристического полинома и вычисления его корней.

Характеристический полином — это тот полином, который получается, если в линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами заменить оператор дифференцирования — на параметр λ. Покажем порядок составления характеристического полинома на простейшем примере уравнения (35). Оператор дифференцирования — удобно обозначить одной буквой D. В новых обозначениях уравнение (35) примет вид

$$Dx = -mx, \tag{38}$$

или

$$(D+m)x = 0. \tag{39}$$

Теперь можно заменить в круглой скобке оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ на параметр λ и получить в скобке характеристический полином уравнения (39) — полином

$\lambda + m$, который имеет единственный корень $\lambda_1 = -m$. Поэтому решение уравнения (39) имеет вид $x = c_1 e^{\lambda_1 t} = c_1 e^{-mt}$. Если характеристический полином имеет несколько корней: λ_1; λ_2; ...λ_n , то решение дифференциального уравнения имеет вид $x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + ...c_4 e^{-\lambda_4 t}$, где c_1; c_2; ...c_4 —постоянные числа, называемые постоянными интегрирования.

Относительно линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений имеет место простая теорема: если все корни характеристического полинома отрицательны, то система устойчива, а у устойчивой системы отклонения любых переменных от желаемых значений убывают с течением времени и стремятся к значениям $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,… $x_n = 0$.

Иллюстрацией этой теоремы является уравнение (35). Единственный корень его характеристического полинома $\lambda + m$ отрицателен, и поэтому решение уравнения (35), как показывает формула (36), с течением времени стремится к $x = 0$.

Так же просто исследуются и уравнения любого порядка. Так, например, если нам необходимо исследовать уравнение

$$x'' + 3x' + 2x = 0, \tag{40}$$

то, обозначив $\frac{d}{dt} = D$, оно приводиться к виду

$$\left(D^2 + 3D + 2\right)x = 0, \tag{41}$$

после чего легко записывается его характеристический полином

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 \tag{42}$$

и найдятся корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Поскольку все корни отрицательны, то решение $x(t)$ стремится к нулю с ростом времени.

И действительно, как легко проверить прямой подстановкой в уравнение (40), ему могут удовлетворять решения $x = c_1 e^{-t}$ или $x = c_2 e^{-2t}$, или их комбинации: $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$, где c_1 и c_2 — постоянные числа, называемые постоянными интегрирования и определяемые из начальных условий, т. е. из заданных значений переменной и ее производной при $t = 0$. Сразу видно, что при неограниченном увеличении времени любое решение уравнения (40) $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ стремится к значению $x = 0$ для любых c_1 и c_2.

Немного сложнее исследовать тот случай, когда характеристический полином помимо вещественных имеет еще и комплексные корни (или же вообще имеет только одни комплексные корни). Но и в этом случае все зависит от вещественных частей корней. Имеет место простая теорема: если у всех корней характеристического полинома вещественные части отрицательны, то система устойчива, все решения с течением времени стремятся к нулю . Эта теорема сводит важную практическую задачу проверки устойчивости линейных уравнений и систем таких уравнений к вычислению корней полиномов.

Пример: уравнение

$$x''+4x'+8x=0\,, \tag{43}$$

обозначив $\frac{d}{dt}=D$, получаем вид:

$$\left(D^2+4D+8\right)x=0\,. \tag{44}$$

Характеристический полином уравнения (44)

$$\lambda^2+4\lambda+8 \tag{45}$$

имеет комплексные корни:

$$\lambda_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-8}=-2\pm2\sqrt{-1}\,. \tag{46}$$

Однако вещественная часть обоих корней равна -2, она отрицательна, и это означает, что уравнение (43) устойчиво, все его решения с течением времени стремятся к x = 0.

Если степень характеристического полинома велика, то вычисление корней трудоемко. Но немецкий математик А. Гурвиц еще в 1898 году нашел метод, который позволяет без вычисления корней, проверяя только соотношения между коэффициентами полинома, установить, будут вещественные части его корней отрицательными числами или не будут. В честь А . Гурвица полиномы, у которых вещественные части всех корней отрицательны, называют гурвицевыми полиномами. Полные условия Гурвица громоздки, но полезно запомнить простое необходимое условие: гурвицевыми могут быть только полиномы, у которых все коэффициенты имеют один и тот же знак. А поскольку старший член полинома всегда делают положительным (для этого, если нужно, домножают все члены на минус единицу), то необходимое условие можно записать проще: для того, чтобы полином был гурвицевым, необходимо, чтобы среди его коэффициентов не было ни одного отрицательного или равного нулю. Если среди коэффициентов полинома обнаружился хотя бы один отрицательный или нулевой, то нет необходимости тратить силы и время на вычисление его корней или проверку полных условий А. Гурвица: в этом случае исследуемый полином заведомо не может быть гурвицевым, среди его корней хотя бы один не будет иметь отрицательной вещественной части, а значит и уравнение (или система уравнений), имеющие такой характеристический полином, не могут быть устойчивыми. Это необходимое условие, найденное словацким инженером Стодолой и названное в его честь необходимым условием Стодолы, позволяет сократить расчеты, не тратить лишнего труда на вычисление корней. Необходимо пояснить условие Стодолы для случая вещественных корней характеристического полинома. Пусть полином Δ степени n имеет n отрицательных вещественных корней a_1 ; a_2;...a_n. Тогда его можно представить в виде:

$$\Delta = (\lambda + a_1)(\lambda + a_2)...(\lambda + a_n). \tag{47}$$

После перемножения первых двух сомножителей получим трехчлен $\lambda^2 + (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2$ с положительными коэффициентами. После домножения трехчлена на третий сомножитель $\lambda + a_3$ снова получим многочлен с положительными коэффициентами — и так далее, при домножении на любой множитель $\lambda + a_i$ коэффициенты многочлена будут оставаться положительными. Отрицательный коэффициент может появиться в том случае, если хотя бы один из корней полинома Δ будет положительным и, следовательно, в цепочке сомножителей (47) появится сомножитель вида $\lambda - a_i$.

Таким образом, если хотя бы один из коэффициентов полинома имеет знак, противоположный знаку остальных коэффициентов (или равен нулю), то дальше можно уже не считать: исследуемый полином заведомо не гурвицев. А вот если все коэффициенты имеют одинаковые знаки, то полином может быть и гурвицевым, и не гурвицевым: тут уже нужно вычислять корни.

Правило определения устойчивости через корни характеристического полинома распространяется и на системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть нам дана система двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Обозначив, как и ранее, $\frac{d}{dt} = D$, систему уравнений (48) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} Dx_1 &= x_1 + x_2 \\ Dx_2 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}\right\} \quad ,(49)$$

а, заменив оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ на параметр λ, система (49) приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + (\lambda - 3)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{50}$$

т.е. приводится к уже рассмотренной ранее системе алгебраических однородных линейных уравнений с параметром λ.

Домножив второе из уравнений (50) на (λ-1) и сложив с первым, исключается переменная x_1 и получается:

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 2)x_1 = 0.$$

В скобках стоит характеристический полином. Вспомнив материал, изложенный в §3, можно убедиться, что корни характеристического полинома совпадают с теми значениями параметра λ, при которых система уравнений (50) имеет ненулевое решение. В данном случае характеристический полином заведомо не гурвицев, поскольку коэффициенты имеют разные знаки, поэтому система (48) неустойчива, ее решения с течением времени не стремятся к нулю, а, наоборот, неограниченно возрастают.

То же самое правило имеет место и для любых систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: решение очень важного для практики вопроса об их устойчивости сводится к отысканию корней характеристического полинома системы или — что то же самое — к нахождению значений параметра λ, при котором система линейных однородных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения (напомним, что и алгебраические уравнения получаются из дифференциальных после замены оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ на параметр λ).

В § 3, рассматривая системы линейных однородных уравнений с параметром λ, было сказано, что к вычислению значений параметра, при которых система имеет ненулевые решения, сводятся многие важные практические задачи . Теперь можно увидеть, что одна из этих задач — это проверка устойчивости систем автоматического управления, а без такой проверки не обходится ни один расчет современной сложной технической системы.

Пример 5.

Рассмотрим систему автоматического управления частотой вращения двигателя постоянного тока, которая описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}&\left(D^3 + 4D^2 + 5D + 2\right)x = \left(D^2 + 2D + 1\right)u \qquad (51)\\ &\left(D^2 + 4D + 5\right)x = \left(D + 1\right)u \qquad (52)\end{aligned}\right\},$$

где $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, x — отклонение частоты вращения от желаемого значения, u — управляющее воздействие, ток якоря, изменение которого влияет на частоту вращения.

Уравнение (51) является уравнением объекта управления, двигателя постоянного тока, частота вращения которого зависит от тока якоря, а уравнение (52) является уравнением регулятора. Оно показывает, каким образом формируется управляющее воздействие — оно формируется автоматически, на основании измерения отклонения частоты вращения от желаемого значения.

Поскольку в дальнейшем будет интересна только устойчивость системы управления (51) - (52), то можно заменить оператор дифференцирования $D=\frac{d}{dt}$ на параметр λ, и получаются алгебраические уравнения:

$$(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2)x=(\lambda^2+2\lambda+1)u \tag{53}$$

$$(\lambda^2+4\lambda+5)x=(\lambda+1)u\,. \tag{54}$$

Для уравнений (53)-(54) рассматривается уже знакомая задаау о вычислении значений параметра λ, при которых система (53)-(54) имеет ненулевые решения.

Из уравнения (54) выражается *u* через *x*:

$$u=\frac{\lambda^2+4\lambda+5}{\lambda+1}x$$

и подставляетяся в (53)

$$\left(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2\right)x=\frac{\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)\left(\lambda^2+4\lambda+5\right)}{\left(\lambda+1\right)}x\,. \tag{55}$$

Для избавления от дроби можно домножить правую и левую части равенства (55) на (λ +1) и после выполнения умножения в правой и левой частях равенства (55) привести подобные члены. Получим:

$$\left(\lambda^4-\lambda^4+\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3\right)x=\left(\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3\right)x=0\,. \tag{56}$$

Очевидно, что члены с четвертой степенью λ сокращаются, поэтому значения параметра λ, при которых система уравнений (53) - (54) имеет ненулевые решения, совпадают с корнями полинома

$$\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3\,. \tag{57}$$

Построив график значений полинома (57) как функцию от λ, можно убедиться, что этот график пересекает ось абсцисс при λ = -3 и касается ее при λ = -1.

Непосредственным вычислением значений полинома при λ = -3 и λ = -1 убеждаемся, что при этих значениях он действительно обращается в нуль. Таким образом, полином (57) имеет простой корень $\lambda_1 = -3$ и кратный (двойной) корень $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Заметим, что в уравнении (55) можно сократить числитель и знаменатель на (λ + 1), и тогда после умножения на λ + 1 (вместо умножения на $\lambda^2 + 2\lambda + 1$) и сокращения подобных членов получается вместо уравнения (56) к уравнение

$$\left(\lambda^3 - \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 3\right)x = \left(\lambda^2 + 4\lambda + 3\right)x = 0\,, \qquad (58)$$

в котором стоящий в скобках полином имеет два простых корня: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

Это означает, что произошла потеря одного корня $\lambda_3 = -1$, поскольку переход от системы (53) - (54) не был полностью эквивалентным преобразованием (мы все члены уравнения умножали не на постоянное число, а на полином $\lambda + 1$, который равен нулю при $\lambda = -1$; при таких домножениях всегда надо потом проверять, не потерялся ли корень и нет ли приобретения лишнего, фиктивного корня). Уравнение (58) имеет на одно значение параметра λ меньше, чем имела система уравнений (53) - (54) .

В отличие от уравнения (58), уравнение (56) по отношению к рассматриваемой задаче о значениях параметра λ, доставляющих ненулевые решения, полностью эквивалентно системе (53) - (54) . Уравнению (56), как и системе (53) - (54), доставляют ненулевые решения три значения параметра λ. Точнее, системе вида (53) - (54), но с другими коэффициентами в общем случае доставляли бы ненулевые решения четыре значения параметра λ, поскольку при исключении переменной из системы (53) - (54) можно придти в общем случае к уравнению вида $P(\lambda)x = 0$, где $P(\lambda)$ — полином четвертой степени от параметра λ. Однако, как показывает уравнение (56), коэффициенты в системе (53) - (54) таковы, что члены, содержащие λ^4, сокращаются, поскольку они равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, и на самом деле система (53) - (54) имеет ненулевые решения только при трех значениях параметра λ: при $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (кратный корень, как известно, считается за два корня) .

Поскольку все три значения: λ_1; λ_2 и λ_3 отрицательны, то без проверки корректности решаемой задачи необходимо было бы сделать вывод о том, что рассматриваемая система автоматического управления, описываемая уравнениями (51) - (52), устойчива.

Однако на самом деле этот вывод не будет иметь ни физического, ни технического смысла, поскольку рассматриваемая нами задача некорректна. Действительно, сокращение членов, содержащих λ^4 в уравнении (56), происходит лишь тогда, когда либо коэффициенты уравнений (53) - (54) идеально точно равны своим номинальным значениям, либо их вариации в точности равны одна другой. Ни того, ни другого на практике не бывает.

Действительно, пусть вариация коэффициента при λ^3 в уравнении (53) равна ε_1, а вариации всех остальных членов равны нулю (в принципе такой случай возможен). Тогда после исключения переменной x и вместо уравнения (56) получается уравнение:

$$\left[-\varepsilon_1\lambda^4 + (1 - \varepsilon_1)\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3\right]x = 0\,. \qquad (59)$$

Теперь сразу видно, что при малых $\varepsilon_1 > 0$ полином, стоящий в квадратной скобке, не может быть гурвицевым, поскольку нарушается необходимое условие Стодолы — коэффициент при λ имеет знак, противоположный знаку остальных коэффициентов полинома.

Если $\varepsilon_1 < 0$, то полином, стоящий в квадратной скобке, будет оставаться гурвицевым.

Проведенное исследование показывает, что уже при сколь угодно малых, неизбежных на практике вариациях коэффициентов рассматриваемой системы управления (причем при вариациях только определенного знака), она потеряет устойчивость.

Такую систему, с практической точки зрения, уже нельзя называть устойчивой. Далее будет доказано, что такая система даже более опасна, чем просто система, неустойчивая при номинальных значениях своих коэффициентов.

Таким образом, первоначально полученный на основе анализа корней полинома (57) ответ: «система (51) - (52) устойчивая» после анализа корректности решаемой задачи следует признать ошибочным: задача некорректна, и поэтому ответ об устойчивости практического смысла не имеет. Раз система теряет устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике вариациях коэффициентов, то, с практической точки зрения, она ничуть не лучше неустойчивой и даже (как покажем далее) хуже, чем просто неустойчивая.

Этот пример еще раз показывает важную роль проверки корректности решаемой задачи. То, что такую проверку не всегда производят, — неправильно . Корректность всегда надо проверять. Проверять корректность при «ручном» счете, разумеется, весьма трудоемко (поэтому ее раньше часто не проверяли), но при наличии вычислительной техники проверка корректности не так уж трудна, и ее надо обязательно проводить.

Однако, и проверка корректности может не помочь избежать опасной ошибки, если неожиданно встретится задача, относящейся к третьему классу — классу «задач-перевертышей».

Пример.

Относительно простую систему дифференциальных уравнений (51) - (52) сравнительно нетрудно исследовать на устойчивость и на сохранение устойчивости в том виде, в каком она записана. Однако при исследовании современных сложных систем автоматического управления приходится иметь дело с большим количеством уравнений самых различных порядков.

«Вручную» исследовать и рассчитывать такие сложные системы невозможно, требуется использовать вычислительную технику, а для использования стандартных программ требуется унификация. Поэтому системы уравнений почти всегда приводят к унифицированному виду, к так называемой нормальной форме, к форме n уравнений первого порядка. Такое приведение к нормальной форме производится простым введением новых переменных. Покажем порядок такого приведения на примере системы уравнений (51)- (52).

Введем новые переменные:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= Dx_1 - u \\ x_3 &= Dx_2 \\ u &= u \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

(т.е. переменную x в уравнениях (51) - (52) обозначим через x_1, переменную u (управление) оставим без изменения, а новые переменные x_2 и x_3 определим через второе и третье равенство из равенств (60) . В новых переменных уравнение (51) переходит в нормальную форму, т . е . в систему трех уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} Dx_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ Dx_2 &= x_3 \\ Dx_3 &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (61)$$

а уравнение (52) принимает вид:

$$u = -x_1 - 2x_2 - x_3 . \qquad (62)$$

Правильность перехода от уравнения (51) к системе (61) можно проверить обратным преобразованием — надо исключить переменные x_2 и x_3 из уравнений (61), и тогда произойдет возвращение к уравнению (52).

Для пояснения перехода от уравнения (52) к уравнению (62) перегруппируем члены в уравнении (52) и перенесем некоторые члены из правой части в левую с изменением знака. Проделав эти безусловно эквивалентные преобразования, из уравнения (52) получается:

$$\left[\left(D^2 + 2D\right)x - Du\right] + \left[(2D + 4)x - 2u\right] + x + u = 0 . \qquad (63)$$

Теперь, сверяясь с равенствами (60), в выражении, стоящем в первой квадратной скобке, видна переменная x_3, во второй квадратной скобке стоит удвоенная переменная x_2 (действительно, $(2D + 4)x_1 - 2u = 2x_2$), и с учетом этих соотношений уравнение (63) действительно переходит в уравнение (62).

Теперь заменяется оператор дифференцирования D на параметр λ, и тогда задача определения устойчивости системы уравнений (61) - (62) сведется к задаче о вычислении значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda x_1 = -2x_1 + x_2 + u\\&\lambda x_2 = x_3\\&\lambda x_3 = -x_2 - 2x_3\\&0 = x_1 + 2x_2 + x_3 + u\end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

(система (64) следует из уравнений (61) и (62); она подобна тем системам линейных однородных уравнений с параметром, которые мы уже рассматривали в §3).

Исключая из системы (64) переменные x_2; x_3; u одну за другой, начиная с последнего уравнения, получается в конце уравнение:

$$\left(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3\right)x_1 = 0\,. \qquad (65)$$

Оно совпадает с полученным ранее уравнением (56), которое, как уже было установлено, имеет три корня: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Следовательно, и система (64) будет иметь ненулевые решения при $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Это еще раз подчеркивает, что в отношении рассматриваемой нами задачи о значениях параметра λ система уравнений (64) эквивалентна системе уравнений (53) - (54), а система в нормальной форме (61) - (62) эквивалентна системе (51) - (52) . И та, и другая системы устойчивы.

Теперь исследуем корректность рассматриваемой задачи о вычислении значений λ, при которых система (64) имеет ненулевое решение. Для этого достаточно повторить исключение переменных «с конца» для той системы, в которую перейдет система (64) после вариаций всех своих коэффициентов, т.е. для системы

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(1+\varepsilon_1)x_1 = -2(1+\varepsilon_2)x_1 + (1+\varepsilon_3)x_2 + (1+\varepsilon_4)u\\&\lambda(1+\varepsilon_5)x_2 = (1+\varepsilon_6)x_3\\&\lambda(1+\varepsilon_7)x_3 = -(1+\varepsilon_8)x_2 - 2(1+\varepsilon_9)x_3\\&0 = (1+\varepsilon_{10})x_1 + 2(1+\varepsilon_{11})x_2 + (1+\varepsilon_{12})x_3 + (1+\varepsilon_{13})u\end{aligned}\right\}. \qquad (66)$$

«Вручную» исключать переменные из системы (66) и искать корни характеристического полинома требуется, разумеется, большого терпения. Вычислительная техника справится с этим быстрее. Приведем окончательный результат: при любых малых ε_1; ε_2;… ε_{13} значения параметра λ, при которых система (66) имеет ненулевые решения, будут мало отличаться от ранее найденных нами значений $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Для системы (64) задача вычисления значений λ, при которых система имеет ненулевые решения, корректна.

А поскольку эта задача корректна, то на основе исследования системы уравнений (64) и опираясь на те научные методы, которые были известны до 1991 года, любой проектирующий систему управления инженер должен был сделать вывод: система управления, описываемая уравнениями (51) - (52), устойчива и сохранит устойчивость при вариациях своих коэффициентов и параметров.

Однако этот вывод ошибочен. На самом деле рассматриваемая система управления, описываемая уравнениями (51) - (52), как уже установлено ранее, хотя формально и устойчива, но не сохранит устойчивости при сколь угодно малых, неизбежных на практике вариациях параметров. Исследуя ту же систему после приведения ее уравнений с помощью эквивалентных преобразований к виду (61) - (62), неизбежно получается ошибочный ответ на вопрос о сохранении устойчивости при вариациях коэффициентов и параметров. Причина ошибки заключается в том, что до исследований 1991-1997 гг. еще не различали преобразований эквивалентных в расширенном смысле от преобразований, эквивалентных в классическом смысле, еще не подозревали о существовании третьего класса задач физики и техники — «задач-перевертышей», которые могут менять корректность в ходе решения.

На самом деле преобразование, переводящее систему уравнений (53) - (54) в систему (64), эквивалентно в классическом смысле, но не в расширенном, а задача проверки сохранения устойчивости у системы управления, описываемой уравнениями (53) - (54) и решаемая путем преобразований этих уравнений в систему (64), является еще одним примером задач, относящихся к третьему классу — классу «задач-перевертышей», промежуточных между ранее известными классами корректных и некорректных задач. Причем на этот раз встречается совершенно конкретная практическая задача — а как уже было сказано – что каждая неожиданная встреча с задачей третьего класса может привести к ошибке в расчетах.

§7. Приложения к предотвращению аварий и катастроф

В предыдущих разделах было показано, что изменение корректности решаемой задачи при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях может привести к ошибкам в расчетах. Теперь можно показать, что подобные ошибки могут стать причиной аварий и катастроф.

Действительно, обратимся еще раз к рассмотренной в §6 системе управления, математической моделью которой являются уравнения (51) - (52) . Было показано, что эта система может терять устойчивость даже при очень малых отклонениях своих параметров от номинальных значений (причем при отклонениях только определенного знака), но расчет системы по уравнениям, записанным в нормальной форме, и по стандартным программам этого опасного свойства системы не обнаруживает. По результатам исследования уравнений, записанных в нормальной форме, необходимо прийти к выводу, что проектируемая система устойчива, сохраняет устойчивость при вариациях коэффициентов и параметров и, следовательно, вполне надежна. По результатам такого расчета безусловно будет принята рекомендация: систему можно изготовить «в металле» и после соответствующих строгих испытаний поставить на реальный объект - например, использовать как систему регулирования частоты вращения двигателей самолета.

При изготовлении любой системы и устройства неизбежны малые отклонения любых параметров системы от номинальных значений, а значит, неизбежны и малые отклонения от номинальных значений коэффициентов уравнений в математической модели системы. Знак этих отклонений заранее непредсказуем, реальный параметр может быть и немного больше, и немного меньше своего номинального значения. Поэтому может оказаться так, что эти отклонения окажутся в безопасной зоне. Так, например, возвращаясь к системе, описываемой уравнениями (51) - (52), может оказаться, что после изготовления реальная система будет соответствовать уравнениям (51)- (52), в которых коэффициент при члене D^3 равен не единице, а, например, равен 0,999, т. е . $\varepsilon < 0$. Но тогда, как показывают проведенные нами в §6 выкладки, характеристический полином системы будет гурвицевым, а сама система — устойчивой . Это означает, что она покажет себя устойчивой и на испытаниях, она будет исправно и хорошо работать. Система будет иметь малый запас устойчивости, но в работе системы на испытаниях малый запас устойчивости не проявится, система успешно пройдет испытания и может быть поставлена на самолет. Во время полетов она первое время будет работать вполне надежно, нареканий на нее не будет. Но ведь в ходе эксплуатации самолета, как и любого другого технического объекта, все параметры не могут оставаться идеально неизменными. Все детали постепенно немного изнашиваются, притираются друг к другу, их размеры, хоть немного, но меняются при изменениях температуры, а это приводит к тому, что все коэффициенты в математической модели, отражающей реальное поведение системы, и все их вариации немного изменяются, образно говоря — «плавают». В любой непредвиденный момент времени может оказаться, что коэффициент в уравнении (51) стал равным уже не 0,999, а 1,001, и поэтому вариация ε стала уже не меньше, а больше нуля, но это значит (как показывает уравнение (59)), что система потеряла устойчивость. На практике это означает, что потерявшая устойчивость система перестанет правильно управлять теми параметрами полета, которыми она управляла. Если она управляла частотой вращений двигателей самолета, то частота вращения может быстро возрасти до недопустимых значений, ведущих к поломке двигателя. Если система регулировала крен самолета, то крен может быстро возрасти и привести к срыву самолета в штопор, из которого самолет нелегко вывести и т.п. Потеря устойчивости всегда опасна и может привести не только к аварии, но и к катастрофе, к гибели людей.

Поэтому устойчивость любой проектируемой системы, а также корректность решаемой задачи тщательно проверяется во всех проектно-конструкторских организациях и в России, и во всех зарубежных странах. Однако до последнего времени оставалось незамеченным, что при неожиданной встрече с задачей, относящейся к ранее неизвестному третьему классу «задач-перевертышей», промежуточных между корректными и некорректными, традиционные методы расчета, проверки корректности и запасов устойчивости могут не дать правильного ответа, могут не предупредить о возможной аварии и катастрофе. Действительно, все сегодняшние методы расчета с использованием вычислительной техники основаны, как правило, на предварительном приведении исследуемой системы к нормальной форме, к форме n уравнений первого порядка. Это приведение выполняется, разумеется, с помощью эквивалентных в классическом смысле преобразований, не изменяющих решений. Это — так. Однако, как уже было показано на примере системы, описываемой уравнениями (53) - (54), при приведении системы к нормальной форме решения не изменяются, но может измениться корректность решаемой задачи . Это означает, что был получен неправильный ответ на очень важный вопрос о сохранении устойчивости при неизбежных в ходе реальной эксплуатации вариациях любых параметров системы, малых отклонениях от номинальных значений. А ведь подобная ошибка в расчете может оказаться не выявленной затем при испытаниях. Вот почему ошибка в оценке корректности решаемой задачи опаснее, чем прямая ошибка в решении, в значениях переменных x_1; x_2;… x_n.

Пусть, например, произошла ошибка при проектировании, неустойчивую систему по расчету признали устойчивой и дали рекомендацию об изготовлении проектируемой системы «в металле». На испытаниях ошибка сразу выявится, поскольку неустойчивая система, как выражаются инженеры, «пойдет в разнос» и будет забракована. В то же время ошибка в оценке корректности решаемой задачи может оказаться не выявленной при самых строгих испытаниях — если при изготовлении реального устройства неизбежные малые отклонения от расчетных, номинальных значений параметров случайно оказались в безопасных зонах.

Иногда возражают: «Но ведь на испытаниях мы можем «покачать» параметры испытываемого устройства, провести испытания не только при номинальных значениях параметров, но и при «покачивании» их в одну и в другую сторону». Конечно, «покачивание» параметров на испытаниях помогает выявить опасные системы с малыми запасами устойчивости, но помогает не всегда. Дело в том, что устойчивость может теряться и при определенных сочетаниях знаков вариаций различных параметров, например, если вариация первого параметра или коэффициента уравнения обязательно положительна, второго — отрицательна, третьего — снова отрицательна, четвертого — положительна и т.д. Пусть система содержит двадцать параметров, или же ее математическая модель пусть содержит двадцать ненулевых коэффициентов — для современных сложных систем управления и та и другая цифры очень невелики. Но для двадцати коэффициентов насчитывается 2^{20} сочетаний их положительных и отрицательных вариаций. Все их надо проверить и испытать на устойчивость . Но 2^{20} — это больше, чем 10^6, т . е . больше миллиона (напомним, что $2^{10} = 1024$, поэтому $2^{20} > 1000^2$) . На вычислительной машине такое число сочетаний проверить еще можно, а в реальных испытаниях, на уже изготовленной системе, или устройстве такого количества испытаний не проведешь. Поэтому надо следить, чтобы все расчеты были надежными, а для обеспечения надежности надо учитывать возможность встречи с задачами третьего класса — промежуточными между известными классами корректных и некорректных задач. Для задач третьего класса старые, традиционные методы проверки корректности уже не всегда срабатывают, и поэтому для предотвращения аварий нужно разрабатывать новые, более совершенные методы.

К счастью, для современной техники, да и для всех нас, чьи жизни зависят от аварий, задачи третьего класса встречаются относительно редко, поэтому аварий, происходящих от неполноты и несовершенства традиционных методов расчета пока еще немного. Но ведь по мере усложнения технических систем и устройств число таких аварий может возрастать. Поэтому нужно разрабатывать более совершенные методы расчета, особенно для третьего, самого «коварного» класса. Только такая проверка позволит сохранить жизни людей, предотвратить аварии и катастрофы.

Приходилось ли уже встречаться с авариями, причиной которых были пробелы в методах проектирования, порождающие при встрече с задачами третьего класса системы, способные терять устойчивость при малых отклонениях коэффициентов и параметров от их номинальных значений? Достоверно ответить на этот вопрос трудно, поскольку расследование причин аварий — дело тонкое и к тому же осложненное корыстными интересами проектировщиков и изготовителей, которые часто стараются скрыть истинные причины аварий всеми возможными способами.

Материал, изложенный в §§4-6, позволяет указать характерные черты аварий, возникающих в системах, способных терять устойчивость при вариациях параметров: во-первых, подобные аварии протекают быстро, как внезапный и неожиданный отказ (поскольку дополнительный корень, появляющийся при вариациях параметров, велик и отклонения регулируемых величин от безопасных значений нарастают очень быстро).

Во-вторых, что особенно существенно, если авария не привела к разрушению системы, а была вовремя отключена защитой, то при проверке системы она может через некоторое время оказаться совершенно исправной, поскольку интересующий нас параметр может за короткое время «переплыть» обратно в безопасную зону, и поэтому система снова станет устойчивой и исправно работающей. А малость запаса устойчивости, как уже говорилось, при проверках и испытаниях обнаружить очень трудно.

С учетом этих явлений привлекают особое внимание две аварии с пассажирским самолетом — аэробусом А-310. Аэробусы этого типа выпускаются совместной франко-германской компанией по производству самолетов, и самая страшная авария с аэробусом этого типа произошла 22 марта 1994 года на территории России под городом Междуреченском. Эта авария многим памятна. Самолет летел тогда под управлением российского экипажа, внезапно вошел в штопор, стал быстро терять высоту и упал на землю. Все пассажиры и весь экипаж погибли. Никто не спасся. Однако, так называемый «черный ящик», в котором на стальной магнитофонной ленте записываются показания приборов и переговоры членов экипажа за несколько минут до аварии и во время нее, был найден на месте аварии в обломках самолета.

Расшифровка записей «черного ящика» показала, что авария произошла в тот момент, когда самолет управлялся системой автоматического управления (автопилотом) и спокойно шел в горизонтальном полете при постоянной скорости. Без видимой причины внезапно стали быстро нарастать отклонения угла крена от нормального значения, а экипаж не успел при переходе на ручное управление ввести их в безопасные рамки. Отклонения возросли настолько, что самолет потерял управляемость, вошел в штопор и упал. Ясно, что первопричиной аварии стала потеря устойчивости системой автоматического управления полетом.

Аварию расследовала международная комиссия, которая была учреждена потому, что самолет А-310 был спроектирован и изготовлен франко-германской компанией, но в том роковом полете он шел под управлением российского экипажа. Международная комиссия обратила главное внимание на то, что по записям «черного ящика» было установлено нарушение российским экипажем правил полета: в момент аварии в пилотской кабине и в кресле пилота находились дети командира корабля. При этом осталось в тени, что если даже присутствие детей в кабине и затруднило экипажу быстрый переход на ручное управление после отказа автопилота и нарастания крена, то первопричиной аварии был все же отказ автопилота. Очень возможно, что этот отказ был связан с потерей устойчивости из-за неудачно спроектированной и рассчитанной системы управления, которая оказалась способной терять устойчивость при вариациях своих многочисленных параметров. Однако международная комиссия не расследовала подробно эту наиболее вероятную причину аварии даже после того, как вскоре случилось еще одно похожее происшествие с другим самолетом того же типа А-310 . Вблизи Бухареста во время полета в автоматическом режиме, когда работал автопилот, стали быстро нарастать отклонения крена от нормативных значений. На этот раз пилот успел, отключив автопилот, взять управление на себя. Он успел выровнять самолет и успешно посадил его. Самое интересное в этой аварии произошло во время последующей наземной проверки: оказалось, что автопилот не имеет неисправностей и работает нормально. Очень вероятной причиной этого странного явления был незаметный уход вариации параметра из опасной в безопасную зону.

Тем не менее международная комиссия не рассматривала эти настораживающие особенности аварий над Междуреченском и Бухарестом, очень определенно указывающие на их причину — потерю устойчивости при вариациях параметров, — а сосредоточила внимание на нарушениях правил полета российским экипажем. Причина была в деньгах: ведь если признать, что причиной аварии были недоработки в проектировании и расчете системы управления самолетом, то все убытки и многомиллионные выплаты жертвам аварии легли бы на франко-германскую компанию, проектировавшую и изготовлявшую самолет. Обратив главное внимание на допущенное российским экипажем грубое нарушение правил полета (присутствие детей командира корабля в пилотской кабине), французские и немецкие представители в международной комиссии сумели переложить главную тяжесть ответственности на российскую сторону. В расследовании аварий дело обстоит очень и очень непросто.

Использование более совершенных методов проверки запасов устойчивости, разработанных в Санкт-Петербургском государственном университете и учитывающих возможное изменение корректности при преобразованиях, эквивалентных в классическом, но не в расширенном смысле, уменьшает вероятность аварий, увеличивает безопасность. Но в деле практического применения этих методов не все еще идет гладко. Казалось бы, ясно, что фирма, первой использовавшая у себя более совершенные методы расчета запасов устойчивости, получит преимущества в конкурентной борьбе, поскольку может с полным правом утверждать и довести до всеобщего сведения, что ее продукция более безопасна, чем у фирм-конкурентов, коль скоро одна из причин аварий этой фирмой устранена. И все же внедрение новых методов идет медленно. Легче привести отрицательные примеры. Так, например, в 1990-1998 гг. происходило обновление вспомогательного оборудования (насосы, электроприводы, системы управления ими), отслужившего свой срок, на Ленинградской атомной электростанции, расположенной в 70 километрах от Петербурга, и рассчитывалось это новое оборудование с использованием быстродействующей вычислительной техники, разумеется, с приведением уравнений к нормальной форме. При этом могли возникнуть ошибки в оценках запасов устойчивости, о которых мы уже рассказывали, а это означает, что могли быть изготовлены и установлены на атомной электростанции опасные системы, в которых по расчету запас устойчивости достаточный, а на самом деле — очень маленький. Такие системы опасны тем, что при малых отклонениях параметров от номинальных значений, которые неожиданно возникают в ходе эксплуатации, они могут в любой непредвиденный момент времени потерять устойчивость и создать аварийную ситуацию. А ведь аварии на атомных электростанциях очень опасны. Все мы помним страшную катастрофу на Чернобыльской атомной электростанции. Несмотря на то, что на атомных станциях имеются многочисленные системы резервирования и защиты, а потеря устойчивости одной из систем еще совсем не обязательно сразу ведет к катастрофе, все же присутствие на атомной станции оборудования, способного в непредвиденный момент времени терять устойчивость и выходить из строя, разумеется, недопустимо.

Поэтому Санкт-Петербургский государственный университет еще в 1992 году предложил провести дополнительные расчеты, которые позволили бы выявить опасное оборудование станции и заменить его. Несмотря на длительные переговоры с руководством Ленинградской атомной электростанции ничего не было сделано. А это опасно. Пока, за прошедшие годы, катастрофы не произошло. Но она возможна.

§8. Выводы и заключение по первой части

Обобщая материал, рассмотренный в §§ 1–7, приходим к следующим выводам:

1. В самом конце двадцатого века было открыто, что существуют такие эквивалентные (т.е. не изменяющие решений) преобразования систем уравнений, которые могут изменять многие важные <u>свойства</u> решений, например – корректность. Исходная система может, например, быть некорректной, может коренным образом изменять свои

свойства при сколь угодно малых, а значит и неизбежных на практике изменениях параметров, а преобразованная система может стать корректной.

Если рассматриваемая система уравнений является математической моделью реального технического объекта, а мы исследуем на корректность только преобразованную систему, то мы придем к неверному заключению о свойствах проектируемого объекта, можем допустить к «реализации в металле» опасную конструкцию, которая потом нас подведет, приведет к опасной аварии и даже к катастрофе.

2. Все это не означает, разумеется, что не нужно пользоваться эквивалентными преобразованиями. Такие преобразования упрощают уравнения и без них не обойтись. Нужно просто быть внимательными и проверять – не оказалось ли среди использованных эквивалентных преобразований преобразования опасного.

Необходимо помнить, что основная часть эквивалентных преобразований – это хорошие, полезные преобразования, упрощающие решаемую задачу. Опасных преобразований немного, и выделить их можно путем несложных проверок, подробно описанных в книге [2]. Не нужно бояться редко встречающихся опасных преобразований, изменяющих корректность и ведущих к авариям. Нужно просто не проявлять беспечности, помнить о возможности «нехороших» преобразований и отсеивать их. Если все это делать аккуратно, то инженерные расчеты станут надежными и количество аварий и катастроф существенно уменьшится. К сожалению, до сегодняшнего дня значительная часть постоянно повторяющихся аварий и катастроф имеет своей причиной ошибки и неточности в расчете и проектировании – об этих авариях рассказано, например, в книге [4] на стр. 88-92, и в книге [10].

Многие из этих аварий можно было предотвратить при своевременном использовании научных открытий, сделанных в Санкт-Петербургском государственном университете. Но их не предотвратили, – и люди погибли.

Часть вторая (рассчитана на студентов первых курсов университетов и технических университетов)

§9. Всегда ли решения систем дифференциальных уравнений непрерывно зависят от коэффициентов и параметров?

В данном разделе будет рассказано о недавнем открытии таких систем дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют условиям, приводимым в учебниках, но не имеют непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров.

Хорошо известно, что очень многие технические расчеты требуют умения решать дифференциальные уравнения. Собственно, именно поэтому дифференциальные уравнения входят в математические курсы почти всех технических университетов и теория дифференциальных уравнений излагается во многочисленных учебниках.

Однако, для технических расчетов пригодны лишь дифференциальные уравнения, решения которых непрерывно зависят от параметров исследуемого объекта. Дело в том, что все параметры исследуемых или проектируемых объектов никогда не могут быть измерены или воспроизведены с идеальной точностью. Малые погрешности неизбежны, но, если решения зависят от параметров непрерывно, эти неизбежные малые погрешности приведут лишь к малым погрешностям решений, а решениями с малыми погрешностями вполне можно воспользоваться. Если же непрерывной зависимости нет, то неизбежная малая погрешность измерения может привести к большим погрешностям в решениях и поэтому уравнения, не имеющие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров для практических расчетов непригодны. Использование таких уравнений может привести к ошибкам в расчетах, а любая ошибка при расчете и проектировании может стать причиной аварий и даже катастроф. Примеры подобных опасных ошибок известны.

Поэтому важнейшую роль в учебниках и курсах теории дифференциальных уравнений, читаемых в университетах, играет теорема, доказывающая, при каких условиях решения уравнений действительно будут зависеть от коэффициентов и параметров непрерывно. Так, например, в известном учебнике [3] эта теорема изложена на страницах 313-315 и формулируется достаточно просто: если правые части системы дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме – т.е. в виде системы n уравнений первого порядка – ограничены и удовлетворяют известным условиям Липшица, то решения зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

А поскольку правых частей, не ограниченных или не удовлетворяющих условиям Липшица, в технических расчетах практически не встречается, то делается вывод: при использовании дифференциальных уравнений для расчета реальных технических объектов можно считать, что их решения зависят от коэффициентов и параметров непрерывно. Для полной гарантии достаточно ограниченность и условия Липшица.

Однако, если внимательно посмотреть на доказательства теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров, приводимые в учебнике [3] и в других учебниках, то можно убедиться, что везде доказательства относятся только к системам в нормальной форме, т.е. к системам, состоящим из n уравнений первого порядка (в некоторых учебниках приводится еще доказательство для одного уравнения *n*-го порядка, но и это не меняет дела). Однако системы дифференциальных уравнений многообразны, они могут состоять из различного числа уравнений различных порядков (пример – рассмотренная ранее в §5 система уравнений (51) - (52); она состоит из одного уравнения третьего порядка относительно переменной λ и одного уравнения первого порядка относительно переменной x).

Для всего этого многообразия различных систем дифференциальных уравнений нет доказательств непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Проверьте и убедитесь сами – доказательств действительно нет. Вместо этого в учебниках указывается (и это верно), что почти любая система дифференциальных уравнений эквивалентными преобразованиями (с введением обычно вспомогательных переменных) может быть приведена к нормальной форме, к системе из n уравнений первого порядка, а для нормальной формы все доказано. Поскольку было широко распространено убеждение, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют», то доказательство, выполненное для систем, состоящих из n уравнений первого порядка, молчаливо считали справедливым для любых систем дифференциальных уравнений. В это верили и преподаватели и студенты.

И только после того, как в 1987 г. в монографии [1] были более подробно проанализированы свойства эквивалентных (равносильных) преобразований, это распространенное убеждение было поставлено под сомнение. Действительно, в самом определении эквивалентных (равносильных) преобразований сказано. Что они оставляют неизменными решения, но ничего не сказано о том, что эквивалентные (равноправные) преобразования обязаны оставлять неизменными различные <u>свойства</u> решений – в том числе и такое свойство, как непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров.

Эквивалентные преобразования могут оставлять неизменным это свойство решений (и часто оставляют его неизменным), но могут и не оставлять. Запрета на изменение свойств решений в определении эквивалентных преобразований нет.

Характерный пример – уже рассмотренный ранее в §5 системы уравнений (51) - (52) и (61) - (62). Система (61) - (62) – это результат эквивалентных преобразований, произведенных над системой (51) - (52) – преобразований, произведенных с целью приведения системы (51) - (52) к системе уравнений первого порядка. Было подтверждено, что после введения вспомогательных новых переменных с помощью равенств (60), получается система из четырех уравнений с четырьмя переменными x_1; x_2; x_3; x_4; и, причем четвертое уравнение (уравнение (62)) вырождается, превращается в данном случае из дифференциального уравнения первого порядка в его частный случай – в уравнение нулевого порядка, т.е. в уравнение, не содержащее производных. Заметим, что в уравнениях (62) можно выразить одни переменные через другие, затем подставить в (61) и получить, например, систему из трех уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{67}$$

Система (51) - (52), система (61) - (62) и система (67) эквивалентны между собой. Так, решение $x_1 = x$ и в системе (51) - (52), и в системе (61) - (62) и в системе (67) одинаково и имеет вид:

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-t}, \tag{68}$$

(где постоянные интегрирования c_1, c_2 и c_3 определяются из начальных условий) что лишний раз подтверждает эквивалентность этих систем.

В то же время свойства решений этих эквивалентных систем различны. В системах (61) - (62) и (67) решение (68) зависит от коэффициентов непрерывно. Малые изменения коэффициентов приводят лишь к малым изменениям решений. В то же время в системе (51) - (52) сколь угодно малые изменения некоторых коэффициентов могут привести к очень большим, коренным изменениям. Анализируя полином, стоящий в квадратных скобках формулы (59), нетрудно установить, что в нем при сколь угодно малых $\varepsilon_1>0$ появится четвертый корень, приближенно (при малых ε_1) равный $\frac{1}{\varepsilon_1}$. А это означает, что в решении системы (51) - (52), которое при $\varepsilon_1=0$ имеет вид (68), при $\varepsilon_1>0$ первые три члена изменятся очень мало, но появится стремительно растущий четвертый член, и оно (приближенно для малых ε_1) примет вид

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-t} + c_4 e^{\frac{1}{\varepsilon}t} \tag{69}$$

И решение x_1 (как и решение u) при сколь угодно малых $\varepsilon_1>0$ изменится коренным образом.

Но главное, разумеется, заключается не в свойствах тех или иных уравнений. Главное – это свойства реального объекта, электропривода, математической моделью которого с той или иной степенью точности служат и системы уравнений (51) - (52), и системы (61) - (62) и система (67). Эксперимент показывает, что система уравнений (51) - (52) более точно описывает реальное поведение электропривода, чем системы (61) - (62) или (67). Если все коэффициенты в точности равны расчетным, то все эти системы одинаково хорошо описывают реальное поведение объекта; в этом случае его движение устойчиво и соответствует решению (68), одинаковому для всех систем. Однако, если в ходе эксплуатации некоторые параметры объекта испытывают малые вариации, если их реальные значения немного отклоняться от расчетных (в частности, если изменится величина воздушного зазора между полюсами и якорем электродвигателя), то электропривод может «пойти в разнос», частота вращения может резко возрасти (в соответствии с формулой (69)) и произойдет авария.

При этом, что особенно интересно, если воздушный зазор в электроприводе изменится на малую величину, но в другую сторону (не увеличится, а очень немного уменьшится), что будет соответствовать $\varepsilon_1<0$ в формуле (69), то движение электропривода останется устойчивым и надежным (поскольку четвертый член в формуле (69) в этом случае очень быстро затухнет). Таким образом, отклонения от расчетных значений могут быть и опасными и безопасными. Все зависит от их знака.

И вот это обстоятельство является особенно опасным и коварным: ведь при изготовлении реального объекта его параметры неизбежно отклоняются на малые величины от реальных значений, но знак этих отклонений непредсказуем. Предполагается, что это отклонение произошло в безопасную сторону. Тогда при испытаниях только что изготовленного изделия оно будет работать устойчиво. Но в ходе эксплуатации величины всех параметров объекта неизбежно «плавают», испытывают переменные во времени малые отклонения. Стоит некоторым из параметров «переползти» на малую величину, но в опасную сторону (для системы (51) - (51) это соответствует переходу от малого $\varepsilon<0$ к малому $\varepsilon>0$), как объект, описываемый уравнениями (51) - (52) «пойдет в разнос» и может привести к аварии и даже к катастрофе. Поэтому на испытаниях уже изготовленного объекта – даже на самых тщательных испытаниях – часто не удается выявить возможность аварий, происходящих из-за неизбежных малых вариаций параметров в ходе эксплуатации. Испытания далеко не всегда могут помочь. Для выявления возможных аварий необходим правильный расчет.

Но – и это самое опасное – самый тщательный расчет, произведенный по традиционным методикам, которые преподаются на сегодняшний день в большинстве университетов, может не помочь. Традиционные методики требуют предварительного применения математической модели объекта к нормальной форме. Только для уравнений, записанных в нормальной форме можно использовать стандартные программы отыскания решений, заложенные в пакеты MATLAB, Mathcad и другие. Это связано с тем, что многообразие возможных систем уравнений очень велико и составить решающие программы для них для всех – без приведения к нормальной форме – практически невозможно. Поэтому переход к нормальной форме (и, разумеется, с помощью только эквивалентных преобразований) является необходимым.

Заметим сразу, что традиционные программы решения систем дифференциальных уравнений работают хорошо и чаще всего выдают совершенно правильные решения, подтверждаемые экспериментом. Поэтому ими широко пользуются. Но «чаще всего», к сожалению, неравнозначно понятию «всегда».

Пусть вам поручили исследовать объект, математической моделью которого является система управления (51) - (52). Для получения решений системы вы приведете ее эквивалентными преобразованиями к нормальной форме, например – к форме системы (67). Но исследуя систему (67) и пользуясь теоремой о непрерывной зависимости решений от параметров в той форме, в какой она приводится в учебниках, вы уже не увидите, что на самом деле исследуемый вами объект не имеет непрерывной зависимости решений от параметров и поэтому при неизбежных в ходе эксплуатации малых отклонений параметров о расчетных значений он может вести себя самым непредсказуемым образом. Такой объект крайне опасен, он может стать причиной аварий и катастроф. Мы показали существование подобных объектов на примере электропривода, описываемого системой уравнений (51) - (52). В книгах [2] и [4] приведено много подобных объектов, которые в прошлом уже не раз становились причиной аварий и катастроф. К сожалению, подобные аварии не до конца предотвращены и до настоящего времени, хотя их вполне можно предотвратить, опираясь на рекомендации, приведенные в книгах [2] и [4], и сделать это совсем не трудно.

Научные открытия, впервые опубликованные в книге [2] можно сформулировать следующим образом:

1. Обнаружено, что существуют «особые» объекты, которые
   - Во-первых, способны коренным образом изменять свое поведение даже при сколь угодно малых вариациях параметров;
   - Во-вторых, это опасное свойство не всегда может быть обнаружено традиционными методами проверки, не учитывающими возможности изменения свойства решений систем уравнений при их эквивалентных преобразованиях.
2. Обнаружено, что теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров – в той форме, в которой она приводится в учебниках – на самом деле справедлива не для всех систем. Для того, чтобы она стала справедливой всегда, нужно в условия теоремы добавить дополнительные ограничения.

Изложенные положения могут быть использованы – но пока еще очень редко используются – для уточнения инженерных методов проектирования и расчета, для предотвращения аварий и катастроф.

§10. Открытия в области алгебраических уравнений

В инженерных расчетах не меньшую роль, чем дифференциальные уравнения играют системы алгебраических уравнений. Если дифференциальные уравнения описывают чаще всего движение различных объектов (и прежде всего – систем управления), описывающих динамику, то системы алгебраических уравнений описывают прежде всего статику, описывают напряжения и усилия в элементах самых различных конструкций.

Простейший пример изображен на рис. 1.

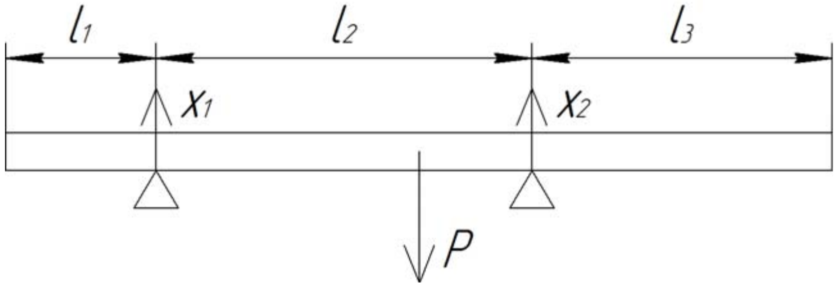

Рис. 1.

Тяжелая балка лежит на двух опорах. Длина балка левее левой опоры равна l_1, длина между опорами равна l_2, длина правее правой опоры – l_3. Как рассчитать усилия в опорах, если вес единицы длины балки равен q килограммов?

Обозначим реакцию нагрузки на левую опору через x_1, на правую опору – через x_2. Понятно, что сумма x_1+x_2 равна весу балки и получается уравнение:

$$x_1 + x_2 = (l_1 + l_2 + l_3)q \;. \tag{70}$$

Для получения второго уравнения рассмотрим моменты относительно воображаемой оси, расположенной в левом конце балки. По часовой стрелке балку стремятся вращать моменты силы, порожденные весом балки. Момент этой силы равен произведению веса на половину длины балки, т.е. $M_1 = (l_1 + l_2 + l_3)\cdot q \cdot (l_1 + l_2 + l_3)\cdot \frac{1}{2}$.

Против часовой стрелки балку стремятся вращать моменты сил x_1 и x_2, равные реакциям на нагрузку на левую и правую опоры. Сумма этих моментов равна

$$M_2 = l_1 q x_1 + (l_2 + l_3) q x_2 \,.$$

Поскольку балка лежит неподвижно, то моменты M_1 и M_2 равны, и получается второе уравнение:

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3)q = l_1 q x_1 + (l_2 + l_3) q x_2 \tag{71}$$

Получаются системы их двух уравнений – (70) и (71) – с двумя неизвестными x_1 и x_2. Решая эти уравнения, можно найти x_1 и x_2 для любых l_1, l_2 и l_3.

На рис. 2 изображена немного более сложная конструкция:

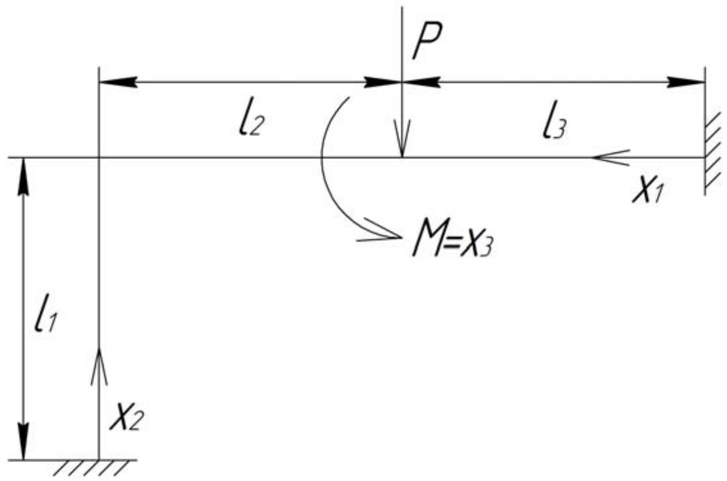

Рис. 2.

Рама, у которой $l_1 = l_2 = l_3 = l$, заделана в двух концах. К середине горизонтального участка приложена сила P. Требуется рассчитать горизонтальную силу x_1 и вертикальную силу x_2, действующие на нижнюю заделку и изгибающий момент x_3. Если силы x_1 и x_2 выразить в долях от силы P, а момент x_3 – в долях от момента $P \bullet l$, то для определения неизвестных x_1; x_2; x_3 получим, как показано в [5] систему из трех уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}14x_1+12x_2+15x_3=3\\12x_1+16x_2+12x_3=5\\5x_1+4x_2+6x_3=1\end{array}\right\}. \qquad (72)$$

Система (72) приводится в известном учебнике [5] и подобрана так, чтобы все коэффициенты оказались целыми числами, что облегчает дальнейшее исследование. К системе (72) мы еще вернемся, а пока отметим, что в различных инженерных расчетах нередко встречается система из большего числа уравнений.

В общем виде системы линейных алгебраических уравнений могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right\}. \qquad (73)$$

Система, состоящая из n уравнений, содержит n^2+n коэффициентов от a_{11} до a_{nn} и от b_1 до b_{n}. Еще в XVIII веке были выведены формулы Крамера, позволяющие найти решения x_1; x_2; … x_{n} системы (73) через определители:

$$x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (74)$$

где D – это определитель, составленный из коэффициентов при x_1; x_2; … x_{n}:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}, \qquad (75)$$

Δ_n – это тот же определитель Δ, но в котором n-й столбец заменен на столбец коэффициентов b_1; b_2; … b_{n}. Для систем, состоящих более, чем из пяти уравнений формулы Крамера уже не удобны, вместо них пользуются методами, основанными на последовательном исключении переменных. Разработаны программы для вычислительных машин, позволяющие решать системы, состоящие из многих уравнений. Подсчитано, что для решения системы из n уравнений требуется, примерно, $\frac{1}{3}n^3$ операций умножения.

Однако, надо учитывать, что все коэффициенты, входящие в системы алгебраических уравнений почти всегда известны нам не с идеальной точностью, а с неизбежной погрешностью.

Во всех реальных технических расчетах коэффициенты систем вида (73) определяются из опыта, из измерений и малые погрешности неизбежны. Фактически о коэффициентах уравнений известно лишь то, что они заключены внутри некоторых интервалов:

$$a_{ij}\left(1-\left|\varepsilon_{ij}\right|\right)\le \overline{a}_{ij} \le a_{ij}\left(1+\left|\varepsilon_{ij}\right|\right) \tag{76}$$

где $\overline{a}_{ij}$ – это истинные, не известные нам значения коэффициентов, a_{ij} – значения, используемые при расчетах, ε_{ij} – числа, малые в сравнении с единицей. В технических расчетах чаще всего встречаются значения ε_{ij}, близкие к $\pm 0{,}01$, хотя, разумеется, могут встречаться и другие величины.

Здесь надо отметить очень важное обстоятельство, на которое, к сожалению, часто не обращают внимания: в ходе расчетов всегда можно встретиться с такими системами уравнений, в которых малые, неизбежные на практике погрешности в коэффициентах приводят к большим погрешностям решений.

Вот простой пример: система

$$\left.\begin{aligned} 10{,}02x_1 + x_2 &= 11{,}02 \\ 10x_1 + x_2 &= 11 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

имеет решение: $x_1 = x_2 = 1$.

Если коэффициент при x_1 в первом уравнении изменится на величину 0,01 – т.е. изменится менее, чем на одну тысячную от первоначального значения, то система (77) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 10{,}01x_1 + x_2 &= 11{,}02 \\ 10x_1 + x_2 &= 11 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

и имеет решения $x_1 = 2$; $x_2 = -9$. Решение x_1 изменится вдвое, а решение x_2 – даже в девять раз (и, кроме того, изменит знак!).

Уже само существование систем, подобных системе (77) – а таких систем много, что пользоваться любым вычисленным решением без анализа его возможной погрешности – не надежно, и очень опасно.

Погрешность в одну тысячную в величине коэффициента в технических расчетах почти всегда неизбежно, и на примере системы (77) можно увидеть, к каким тяжелым последствиям эта малая погрешность может привести.

Вообще говоря, все эти факты известны. Системы, в которых малые погрешности в коэффициентах приводят к большим погрешностям решений получили, название «плохо обусловленные» системы. В основательных учебниках по вычислительной математике и линейной алгебре приводятся методы приближенной оценки погрешностей по так называемым «числам обусловленности», позволяющие отсеивать часть очень опасных «плохо обусловленных» систем – к сожалению, только часть, а не все. Опасность встречи с плохо обусловленной системой остается. Дело в том, что «число обусловленности» дает усредненную оценку погрешностей всех решений системы – от x_1 до x_n. А это – нечто вроде «средней температуры по больнице». Опасную составляющую решения проверки по «числу обусловленности» в этом случае может быть пропущена.

Поэтому еще очень давно предпринимались многочисленные попытки найти более совершенные методы анализа погрешностей, позволяющие найти точную величину погрешности каждой из составляющих решения системы (73) – от x_1 до x_n. Основная трудность на пути вычисления точных величин погрешностей – это огромное число возможных вариантов. Действительно, если абсолютную величину погрешности коэффициента еще можно оценить сравнительно легко – располагая, например, данными о точности измерительных приборов, на основе показаний которых вычисляется коэффициент – то знак погрешности – положительный или отрицательный – чаще всего не предсказуем, поскольку погрешность решения зависит не только от абсолютной величины, но и от знака погрешности каждого коэффициента, а число возможных комбинаций знаков очень велико.

Ранее было упомянуто, что в системе вида (73), состоящей из n уравнений число коэффициентов равно n^2+n. Число возможных комбинаций знаков погрешностей каждого элемента равно числу

$$2^{n^2+n}, \qquad (79)$$

а это число даже при не очень больших n очень велико. Уже при $n = 3$ (т.е. в системе из трех уравнений) оно равно $2^{12} = 4096$, при $n = 4$ оно равно $2^{20} = 1048576$, а при $n = 10$ оно равно 21^{10}, что больше чем 10^{36}. Отсюда следует, что непосредственно выполнить объем вычислений, необходимый для оценки максимально возможной погрешности непосильно для самых быстродействующих вычислительных машин. К таким же непосильным объемам вычислений приводило и использование сложной методики «интервального анализа», о котором рассказано, например, в книге [6].

Однако в 2009 году был опубликован в [7] метод вычисления точной величины погрешности каждой из составляющих – от x_1 до x_n – решения систем линейных алгебраических уравнений вида (73). Новый метод требует гораздо меньшего объема вычислений, вполне посильного для обычного первоначального компьютера.

В основе метода лежит предварительное исследование скорости возрастания (или убывания) величины определителя при вариациях его элементов. Пусть каждый из элементов определителя (75) испытал изменения и определитель (75) принял вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(1\pm\varepsilon_{11}) & a_{12}(1\pm\varepsilon_{12}) & \dots & a_{1n}(1\pm\varepsilon_{1n}) \\ a_{21}(1\pm\varepsilon_{21}) & a_{22}(1\pm\varepsilon_{22}) & \dots & a_{2n}(1\pm\varepsilon_{2n}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}(1\pm\varepsilon_{n1}) & a_{n2}(1\pm\varepsilon_{n2}) & \dots & a_{nn}(1\pm\varepsilon_{nn}) \end{vmatrix}. \tag{80}$$

Абсолютные значения всех чисел ε_{ij} ограничены: $|\varepsilon_{ij}|\leq\varepsilon_m$. Поставится вопрос: какая комбинация знаков величин ε_{ij} (рассматриваемых как переменные величины в интервалах $-\varepsilon_m \leq \varepsilon_m \leq +\varepsilon_m$) приведет к наибольшей скорости возрастания определителя (80)? Несложное исследование, приведенное в [7] на стр. 94-95, дает ответы: наибольшая скорость возрастания определителя будет тогда, когда знаки ε_{ij} будут соответствовать «таблице знаков», составленной по правилу: на месте элемента a_{ij} стоит знак «плюс», если произведение элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij} положительно и стоит знак «минус», если оно отрицательно (об алгебраических дополнениях и их вычислении рассказано в разделе об определителях курса высшей математики в технических университетах).

Пример. Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \tag{81}$$

(более подробно рассмотренный в [7] на стр. 85-88).

Для него алгебраические дополнения первой строки равны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Вычислив алгебраические дополнения остальных строк, для определителя (81) получается его «таблица знаков»:

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \tag{82}$$

Располагая «таблицами знаков» уже совсем не трудно вычислить наибольшее возможное значение определителя для любой величины ε_m в ограничении $|\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon_m$. Пусть, например, для определителя (81) будет $\varepsilon_m = 0{,}01$. Тогда достаточно – в соответствии с «таблицей знаков» (82) вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1(1-0{,}01) & 2(1-0{,}01) & 3(1+0{,}01) \\ 4(1+0{,}01) & 1(1-0{,}01) & 2(1+0{,}01) \\ 3(1+0{,}01) & 4(1+0{,}01) & 5(1-0{,}01) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 1{,}98 & 3{,}03 \\ 4{,}04 & 0{,}99 & 2{,}02 \\ 3{,}03 & 4{,}04 & 4{,}95 \end{vmatrix} = 9{,}6604 \qquad (83)$$

Необходимо отметить, что в этом примере при изменениях элементов определителя на 0,01 (т.е. на 1%), величина определителя изменилась на 1,6604 или на 20,85%.

Столь же легко вычисляется и наибольшая скорость убывания определителя. Для этого достаточно составить «обратную таблицу знаков», знаки которой обратны знакам таблицы, правило составления которой было приведено выше (эту таблицу удобно назвать «прямой таблицей знаков»). Для определителя (81) «прямая таблица знаков» соответствует формуле (82), а «обратная таблица знаков» имеет вид

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}. \qquad (84)$$

С помощью «обратной таблицы» легко вычисляется наименьшее возможное значение определителя. Так, для определителя (81) и $\varepsilon_m = 0{,}01$ достаточно вычислить – в соответствии с таблицей (84) – определитель

$$\begin{vmatrix} 1(1+0{,}01) & 2(1+0{,}01) & 3(1-0{,}01) \\ 4(1-0{,}01) & 1(1+0{,}01) & 2(1-0{,}01) \\ 3(1-0{,}01) & 4(1-0{,}01) & 5(1+0{,}01) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}01 & 2{,}02 & 2{,}97 \\ 3{,}96 & 1{,}01 & 1{,}98 \\ 2{,}97 & 3{,}96 & 5{,}05 \end{vmatrix} = 6{,}3804 \qquad (85)$$

– т.е. величина определителя при $\varepsilon_m = 0{,}01$ и наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций уменьшилась на 1,6196 или на 20,24% (величина наибольшего возможного возрастания не в точности равны величине наибольшего возможного убывания).

Таким образом, при $\varepsilon_m = 0{,}01$ величина определителя (81) заключена в пределах от 6,3804 до 9,6604. Заметим, что для определителя третьего порядка (81) число возможных сочетаний знаков вариаций еще не очень велико – оно равно $2^9 = 512$ и поэтому можно непосредственно вычислить все 512 значений определителя при всех возможных таблицах знаков и непосредственно убедиться, что только «таблица знаков» (82) и (84) соответствует наибольшему и наименьшему значениям определителя, а все другие «таблицы знаков» приводят к промежуточным значениям. Так, например, таблице

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{vmatrix} \qquad (86)$$

соответствует значение определителя (81) равное 8,242408. Таблице

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ + & + & + \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad (87)$$

соответствует значение 6,65004 и т.д. Более подробный анализ различных сочетаний знаков вариаций приведен в [7] на стр. 87-88.

Разумеется, для применения методики «таблицы знаков» к любым определителям необходимо исследовать дополнительные частные случаи, когда, например, некоторые из элементов определителя или алгебраические дополнения обращаются в нуль, или те же случаи, когда при увеличении ε алгебраические дополнения изменяют знак. Все эти частные случаи рассмотрены в [7] на стр. 101-111.

В целом, описанная в [7]методика, основанная на «таблицах знаков» позволяет решать как различные задачи, требующие оценок величин изменения определителя, так и задачу вычисления погрешностей решений систем алгебраических уравнений, опираясь на формулы Крамера (74). Здесь, однако, надо учитывать, что определители D и D_n в формулах (74) отличаются друг от друга только одним столбцом и поэтому здесь возможны два варианта расчета (один начинается с максимизации числителя, другой – с минимизации знаменателя), из которых нужно затем выбрать тот, который приводит к наибольшей величине погрешности. Эти вариации подробно описаны в [7], где приведены и примеры расчетов. Показано, например, что для системы (72), описывающей нагрузки в заделке рамы, показанной на рис. 2, при одних и тех же погрешностях в коэффициентах, погрешности решений x_1 и x_2 с одной стороны и решениях x_3 с другой стороны существенно различны. Поэтому традиционная оценка по «числу обусловленности» в данном случае не укажет на ненадежность решения x_3, которое при погрешностях в коэффициентах всего 0,6% имеет погрешность более 100%.

Количество вычислительных операций, необходимых для точного вычисления погрешностей всех составляющих решений – от x_1 до x_n – систем линейных алгебраических уравнений вида (73) сравнительно невелико. Действительно, для построения «таблиц знаков» определителей D и D_i в формулах Крамера требуется найти знаки всех их $2n^2$ алгебраических дополнений, каждое из которых – это определитель порядка n-1 и требует для своего вычисления, примерно, $\frac{1}{3}(n-1)^3$ умножений. Всего, таким образом, требуется $\frac{2}{3}n^2(n-1)^3$ умножений. С учетом дополнительных вычислений при переходе от определителей к погрешностям решений требуется, примерно,

$$\frac{2}{3}n^2(n-1)^3 + 8n^4 \tag{88}$$

операций умножения. Для n = 5 это число равно, примерно, 9200, для n = 10 оно возрастет до 128600 операции, что вполне доступно для персонального компьютера и совершенно не сравнимо с тем огромным числом операции, необходимых при прямом переборе или использовании методов интервального анализа.

Таким образом, проблема оценки погрешности систем линейных алгебраических уравнений, которые очень часто приходится решать в самых различных областях техники, получила теперь точное решение. Это решение основано на научном открытии – только в данном случае открыто не новое явление, а новый алгоритм, который позволил решать задачу, ранее не поддававшуюся усилиям многих исследователей.

§11. История открытий

Прелюдией к открытию новых, ранее не замечаемых свойств эквивалентных (равносильных) преобразований послужила серия аварий, происходивших еще в 70-х годах XX века при использовании популярных тогда регуляторов, рассчитанных на основах методики так называемого «аналитического конструирования», предложенной выдающимся русским ученым Александром Михайловичем Летовым (1911-1974). Регуляторы, предложенные А.М. Летовым обеспечивали хорошие переходные процессы в регулируемых объектах, обеспечивали устойчивость и сохранение устойчивости при малых отклонениях параметров объекта от расчетных значений. Все это подтверждалось на испытаниях новых регуляторов, и они быстро получили популярность и широкое распространение.

Регуляторы А.М. Летова требовали использование в канале обратной связи полного вектора переменных состояния и, когда использовался новый вектор, все было хорошо. Но при широком использовании «аналитически сконструированных» регуляторов, их стали устанавливать на таких объектах, где некоторые из переменных состояния трудно доступны для измерения и использования в регуляторе. В этом случае малодоступные переменные заменяли на доступные – используя, разумеется, только эквивалентные (равносильные) преобразования переменных. Переходные процессы при такой замене оставались неизменными, как того и следовало ожидать. Однако, совершенно неожиданно обнаружилось, что при таких эквивалентных преобразованиях не сохранялось свойств сохранения устойчивости при малых неизбежных на практике вариациях параметров регулируемого объекта. Устойчивость терялась, и одна за другой происходили аварии и катастрофы.

Поскольку в те годы все сведения об авариях и катастрофах были строго засекречены, серьезного обсуждения причин не происходило. «Аналитически сконструированные» регуляторы просто запретили к использованию. Тяжело переживший аварии своих регуляторов А.М. Летов заболел и скоропостижно скончался, а причины аварий так и не были тогда выяснены.

Еще раз с изменением свойств систем управления при эквивалентных преобразованиях пришлось столкнуться при проектировании оптимальных систем управления (напомним, что оптимальной называется система, наилучшая из всех возможных по какому-либо критерию качества: по быстродействию, по величине запаса устойчивости и т.п.). в оптимальных системах, до предела использующих все возможности управления, обостряются – и требуют особого внимания – вопросы сохранения устойчивости и влияния на нее различных преобразований систем.

В 1987 году, в монографии [1] впервые было опубликовано, что анализ оптимальных систем выявил новое и важное явление: оказалось, что эквивалентные преобразования не безобидны, они могут изменять многие важные свойства преобразуемых систем, в том числе – и такое важное свойство как сохранение или не сохранение устойчивости при неизбежных в ходе эксплуатации малых вариациях параметров управляемого объекта.

Там же, в [1] были опубликованы методы распознавания опасных систем, способных терять устойчивость при малых вариациях параметров и методы нейтрализации этих опасных систем, превращения их в системы безопасные.

При продолжении исследований быстро выяснилось, что эквивалентные преобразования могут быть не безобидны не только для оптимальных систем управления, но и для математических моделей любых объектов. Более того, было открыто существование очень опасных «особых» объектов, которые:

- во-первых, способны терять устойчивость и приводить к авариям при очень малых, неизбежных в ходе эксплуатации вариациях параметров;
- во-вторых, это опасное свойство может быть не обнаружено традиционными методами, не учитывающими только что открытых новых свойств эквивалентности (равносильных) преобразований.

Были также открыты и разработаны методы выявления этих опасных объектов и превращения их в безопасные.

Все эти открытия были опубликованы сперва в ведущих научных журналах России («Автоматика и телемеханика», 1994 г., №11, стр. 186-189, Известия ВУЗ, «Электромеханика», 1991 г., том 371, №4, стр. 473-475), а затем – в книгах [2], [4], [7], [8].

Не лишне напомнить, что все эти статьи и книги перед публикацией рецензировались, а книга [8] рецензировалась даже дважды для издания в России в 2003 году, и для издания и перевода на английский язык в 2006 году.

Многочисленные работы по дальнейшему развитию указанных открытий были выполнены учениками и сотрудниками автора, они имеются в библиографии книг [2] и [4], где приведено 13 названий подобных публикаций. Исследования на смежные темы опубликованы проф. Сизиковым В.С. [8] и проф. Шароватовым В.Т. [9].

Так что полное признание сделанных открытий научным сообществом было достигнуто (хотя и не сразу; на это ушло несколько лет). Но даже признание научным сообществом еще совсем не означает широкого промышленного применения.

Применение сделанных открытий в промышленности, на транспорте и строительстве шло очень и очень медленно – тем более, что сделаны и опубликованы эти открытия в самые трудные для России и российской науки году – в период 1990-2000 годов, когда все производственные отношения в стране перестраивались, перестраивалась вся жизнь и, действительно, многим было «не до науки». Многие научные работники – в том числе ученики и последователи автора – ушли тогда работать в другие сферы деятельности или уехали «за рубеж».

Но научная работа продолжалась. В 2004 году было обнаружено, что известная, приводимая во всех учебниках и широко используемая теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров на самом деле не верна и нуждается в существенном уточнении (опубликовано в 2005 году, в [2], стр. 123-131).

В 2006-2008 годах был открыт новый алгоритм вычисления неустранимой погрешности систем линейных алгебраических уравнений, впервые позволившей дать достаточно точную оценку погрешности каждого из составляющий вектора решений (опубликовано в 2009 году, в [7]).

С 2006 года в работу по практическому использованию сделанных в стенах СПбГУ (опубликованных в [2], [4], [8]) научных открытий выступили ученые Балтийского государственного технического университета (БГТУ), более известного под своим старым наименованием «ВОЕНМЕХ». Сотрудники «ВОЕНМЕХа» быстро поняли, что использование опубликованных в [2], [4] научных открытий позволит найти причины частых аварий и катастроф в авиации и ракетной технике, позволит сократить вероятность аварий и катастроф, спасти жизни людей.

В «ВОЕНМЕХе» под руководством д.т.н. проф. В.Т. Шароватова была образована инициативная группа, которая хотела проверить техническую документацию и проектные расчеты ряда конструкций самолетов с целью выявления (и последующего обезвреживания) очень опасных «особых» систем с малыми запасами устойчивости, которые не могли быть выявлены ранее используемыми методами расчетов.

Однако, работа инициативной группы «ВОЕНМЕХа» была парализована неожиданным активным сопротивлением ряда авиационных структур. Инициативная группа «ВОЕНМЕХа» не смогла преодолеть их сопротивление и постепенно распалась. О неравной борьбе этой группы за предотвращение постоянно повторяющихся катастроф в авиации рассказано в [10] (и, частично, в [4], стр. 139-148). В книге [10] рассказано не только о работах СПбГУ и «ВОЕНМЕХа», но и о многих интересных и знаменитых катастрофах последнего времени и об их истинных причинах. Одна из главных причин – это сопротивление чиновников и административных структур использованию достижений науки. Преодолеть это сопротивление не легко. Но борьба продолжается.

В 2009-2011 годах в большую работу по использованию опубликованных в [2]; [4]; [7]; [8] научных открытий вступили сотрудники Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н.Э. Баумана и работающих при нем научно-технических подразделений (отметим, что МГТУ им. Н.Э. Баумана давно и справедливо считается первым среди всех технических университетов России). Ученые МГТУ много сделали по разработке и совершенствованию найденных методов расчета, предотвращающих аварии и катастрофы, выявляющих опасные «особые» системы.

30 января 2011 года в интернете на официальном сайте МГТУ им. Н.Э. Баумана был размещен блог к.т.н., доцента Владимира Борисовича Маничева под заглавием: «Достоверность и точность инженерных расчетов и их связь с технологическими авариями и катастрофами». В первых же строчках блога был помещен призыв В.Б. Маничева: «Все преподаватели и студенты всех технических университетов России должны знать очень важное для инженеров научное открытие (на мой взгляд важнейшее на рубеже веков научное открытие в математическом моделировании реальных систем) профессора СПбГУ Петрова Ю.П., связанное с эквивалентными (равносильными) преобразованиями уравнений». Далее В.Б. Маничев в своем блоге рассказывает о значении этого открытия в проблеме предотвращения аварий технических систем и рассказывает о результатах, полученных в МГТУ им. Н.Э. Баумана в деле разработки и

реализации новых программных методов инженерных расчетов, использующих последние научные достижения и поэтому более надежных и достоверных, чем сегодняшние зарубежные библиотеки и пакеты программ (В.Б. Маничев упоминает такие пакеты как MATLAB, Mathcad, ANSYS, NASTRAN и еще много других).

Такое большое дело, как пересмотр и совершенствование методик всех инженерных расчетов не может быть, разумеется, выполнено силами только МГТУ им. Н.Э. Баумана, СПбГУ и «ВОЕНМЕХа». Поэтому В.Б. Маничев призывает в своем блоге другие университеты принять участие в этой большой и очень важной работе.

§12. Нерешенные задачи

Хотя основные вопросы построения более совершенной методики инженерных расчетов достаточно подробно рассмотрены в монографиях [2], [4], [7], [8], осталось еще немало интересных и важных задач, в решении которых могут испробовать свои силы молодые исследователи, в том числе и студенты.

Так, например, в публикации [7] рассмотрен проблема вычисления точной величины погрешности решений $x_1;x_2;\ldots x_n$ систем линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (89)$$

при условии, что известны погрешности коэффициентов a_{ij} и b_i. Для решения проблемы предложен достаточно простой алгоритм, дающий точную оценку наибольшей возможной погрешности любой из составляющих вектора решений системы, в то же время, как ранее использовалось, весьма приближенная оценка по «числу обусловленности».

Однако, наибольшая возможная погрешность реализуется при наиболее неблагоприятном сочетании знаков погрешностей коэффициентов a_{ij} и b_i, а вероятность такого сочетания может во многих практических расчетах оказаться очень малой. В теории и практике инженерных расчетов давно выработаны критерии, какие вероятности в тех или иных практических задачах необходимо учитывать, а какими можно пренебречь ввиду их малости. Но для того, чтобы знать, какими величинами можно пренебречь не в ущерб надежности расчета, нужно эти вероятности знать.

Отсюда и возникает важная для практики задача, не получившая решения в монографии [7] и ждущая для своего решения молодого честолюбивого исследователя: пусть для системы уравнений (69) известны наибольшие возможные погрешности коэффициентов a_{ij} и b_i. Не довольствуясь точной величиной наибольшей возможной погрешности x_{imax} каждой из составляющих x_1; x_2; ... x_n вектора решений (эта величина вычислена в [7]), надо вычислить вероятности всех других возможных величин погрешностей – от $x_i = 0$ до $x_i = x_{imax}$.

Несколько иначе обстоит дело с другим научным открытием – открытием того, что существуют системы дифференциальных уравнений, которые с одной стороны удовлетворяют двум условиям, приводимым в учебниках как достаточные условия для наличия непрерывной зависимости решений от параметров (ограниченность и непрерывность правых частей и выполнение условий Липшица), но, на самом деле, все же не имеют этой непрерывной зависимости. В книге [2] приведены примеры таких систем и показано, что непредвиденная встреча с ними может привести (и не раз приводила) к ошибкам в расчетах, авариям и катастрофам.

Это означает, что выполнение известных двух условий, приводимых в учебниках, не всегда достаточно для обеспечения непрерывной зависимости решений от параметров и что необходимо добавить третье условие. Оно должно легко проверяться и гарантировать непрерывную зависимость решений от параметров для всех систем дифференциальных уравнений. В книге [2] приведено такое условие, но было бы полезно найти условие более легко проверяемое и доказать его надежность.

Однако, наиболее важной из нерешенных задач является задача практического применения изложенных в данной книге научных открытий в инженерных расчетах различных технических объектов.

Использование этих открытий существенно уменьшит вероятность аварий и катастроф, поможет создать объекты с лучшими техническими характеристиками, позволит сократить расход материалов. Все принципиально новые технические решения опубликованы, в частности в книгах [1], [2], [4], [7], [8], приведенных в библиографии, и в целом ряде журнальных статей, таких как [11], [12], [13], [14] и многие другие.

Однако, ни широкая публикация новых научных открытий, ни признание этих открытий выдающимися учеными и научным сообществом еще не означают их сколько-нибудь массового применения и использования. Нелегко убедить в преимуществах новых научных открытий докторов наук и академиков, но еще трудней убедить в этом широкие круги тех, кто непосредственно производит расчеты и часто не готов заменить привычные методы – пусть несовершенные, но привычные – на методы новые, требующие изучения.

В книге [10] рассказано, в частности о трудностях, с которыми столкнулась инициативная группа БГТУ «ВОЕНМЕХ» в своих работах по выявлению опасных «особых» систем, которые являются одной из причин аварий самолетов.

История науки показывает, что новые научные открытия часто долго идут по пути признания и широкого практического применения, и здесь большую роль играют исследования молодых ученых. Поле для их работы – открыто.

§13. Советы абитуриентам и студентам

Абитуриент, желающий в дальнейшем работать на «переднем крае» мировой науки, изучать и использовать новейшие научные открытия, должен прежде всего правильно выбрать университет.

Как уже говорилось ранее, над теми научными открытиями, о которых рассказано в книге, работают в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), в Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» в Петербурге и в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана в Москве. Это – очень известные университеты и найти их абитуриенту не трудно.

Необходимо только иметь в виду, что университеты эти большие и научными открытиями, которые изложены в настоящей книге, занимаются лишь немногие из многочисленных кафедр и факультетов. Чтобы найти желаемое, полезно ориентироваться на конкретные имена.

Так, в Санкт-Петербургском государственном университете открытиями, изложенными в настоящей книге, занимаются на факультете «Прикладной математики – процессов управления», на кафедре «Моделирования электромеханических и компьютерных систем» (заведующий кафедрой д.ф.-м.н. проф. Егоров Николай Васильевич). На этой кафедре работает и автор настоящей книги.

В Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» подобными работами руководит д.т.н. проф. Шароватов Валерий Тимофеевич (он же – автор книги [9]) на кафедре «Мехатроники и робототехники».

В Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана работы по практическому использованию описанной в настоящей книге научных открытий и их дальнейшему развитию и совершенствованию приобрели особенно широкий размах и ведутся под руководством к.т.н., доцента В.Б. Маничева на кафедре «САПР».

В Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО) подобными работами руководит д.т.н. проф. Сизиков Валерий Сергеевич (он же – автор книги [8] и редактор ее перевода на английский язык).

Список литературы

1. Петров Ю.П., Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Л., Издательство Ленинградского университета, 1987, 289с.
2. Петров Ю.П., Петров Л.Ю., Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб, издательство «БХВ-Петербург», издание четвертое (первое издание – 1999 г), 2005, 224с.
3. Матвеев Н.М., Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб, издательство «Специальная литература», 1996, 372с.
4. Петров Ю.П., Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов. СПб, издательство «БХВ-Санкт-Петербург», 2008, 160 с.
5. Федовеев В.И., Сопротивление материалов. Учебник для ВУЗов, издание восьмое, М. Наука, 1979, 559 с.
6. Шонин Ю.И., Интервальный анализ. Новосибирск, Наука, 1981, 112 с.
7. Петров Ю.П., Как получить надежные решения систем уравнений. СПб, издательство «БХВ-Петербург», 2009, 175 с.
8. Петров Ю.П., Сизиков В.С., Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. СПб, издательство «Политехника», 2003, 261 с. Книга переведена на английский язык, перевод вышел в 2006 году в издательстве «VSP», Бостон-Лейден.
9. Шароватов В.Т., Обеспечение стабильности показателей качества автоматических систем. Л, Энергоатомиздат, 1987, 176 с.
10. Петров Ю.П., Расследование и предупреждение техногенных катастроф (научный детектив). Издательство «БХВ-Петербург», 2007, 104 с.
11. Петров Ю.П., Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматикаа и телемеханика, 1994, №11, стр. 186-189.
12. Петров Ю.П., О скрытых опасности, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. Известия ВУЗ, «Электромеханика», 1991, №11, стр. 106-108.
13. Петров Ю.П., Предотвращение аварийности в системах управления. Известия ВУЗ, «Электромеханика», 1994, №1-2, стр. 37-40.
14. Академик Данилевич Я.Б., Петров Ю.П., О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей. Доклады Академии наук, 2000, том 371, №4, стр. 471-475.

Некоторые из приведенных книг и статей имеются в интернете на сайте www.petrov1930.narod.ru и в «Яндексе» на фамилию Петров Юрий Петрович, профессор.

Оглавление